laboratoire de mécanique et d'acoustique

Algèbre et analyse tensorielles

pour l'étude des milieux continus

Jean Garrigues

mailto:jean.garrigues@centrale-marseille.fr

http://jean.garrigues.perso.centrale-marseille.fr

1er et 3 février 2016

Pourquoi des tenseurs ?

- Représentation mathématique **intrinsèque** des grandeurs physiques :
  - déformations,
  - efforts intérieurs,
  - autres grandeurs physiques.
- Les opérations tensorielles sont **intrinsèques**.
- Les équations de la MMC sont **intrinsèques**.

Intrinsèque :

Les expressions tensorielles sont valables pour toute base et pour tout système de coordonnées.

Au programme ...

- **Algèbre :**
  - Tenseurs d'ordre p : composantes, variances, opérations tensorielles, tenseurs fondamentaux ;
  - Tenseurs du second ordre : symétrie, sphéricité, spectre, orthogonalité, uniaxialité.
- **Analyse :**
  - Fonctions tensorielles : $\boldsymbol{T}(x)$, $f(\boldsymbol{T})$, $f(\boldsymbol{T},\cdots)$, $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{T},\cdots)$, dérivabilité, différentiabilité, fonctions isotropes ;
  - Champs de tenseurs : gradient, divergence, rotationnel, laplacien.

Première partie

Algèbre tensorielle

Convention d'Einstein

$$d_j = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a^i{}_{kj}\, b_i\, c^k = a^i{}_{kj}\, b_i\, c^k = a^m{}_{kj}\, b_m\, c^k$$

Convention d'Einstein

On supprime les $\sum$ (car ils sont toujours de 1 à n)

Indice muet

Indice de sommation : l'un en haut, l'autre en bas.
Ils sont dits *muets* car on peut changer leur nom.

Indices réels

Identiques dans chaque monôme d'une somme ou d'une égalité.

Règles de la convention d'Einstein

$$d_j = a^i{}_{kj}\, b_i\, c^k$$

Règle 1 : indices muets

Dans un monôme, un indice muet figure exactement deux fois : une fois en haut et une fois en bas.

Règle 2 : indices réels

Dans une égalité ou une somme, chaque monôme doit avoir les mêmes indices réels uniques et à la même hauteur.

Corollaires

- Dans un monôme, aucun indice ne peut figurer plus de 2 fois.
- Chaque sommation a un couple d'indices de nom différent.
- Certaines sommations ne peuvent pas s'écrire avec la convention d'Einstein. (exemple : $\sum_{i=1}^{n} i = n(n+1)/2$)

Symbole de Kronecker

Symbole de Kronecker

$$\delta^i_j = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Quelques exemples :

- $T^i{}_j \, \delta^k_i = T^k{}_j$
- $\delta^i_j \boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{e}_j$
- $\delta^i_i = n$

Algèbre vectorielle

Notations :

- $\mathbb{V}$: espace vectoriel euclidien, de dimension n ;
- $\{\boldsymbol{e}_\bullet\}$: une n-base quelconque de $\mathbb{V}$;
- $\boldsymbol{v}$: un vecteur de $\mathbb{V}$.

$$\boldsymbol{v} = v^i \boldsymbol{e}_i \qquad \left(= \sum_{i=1}^{n} v^i \boldsymbol{e}_i \right)$$

Définition

Les v^i sont les composantes **contravariantes** du vecteur $\boldsymbol{v}$.

Changement de base

Nouvelle n-base $\{\boldsymbol{e}'_\bullet\}$: $\quad \boldsymbol{e}'_j = A^i{}_j\, \boldsymbol{e}_i$

$A^i{}_j$: i^{e} composante contravariante du vecteur $\boldsymbol{e}'_j$ sur la base $\{\boldsymbol{e}_\bullet\}$

Matrice de passage de $\{\boldsymbol{e}_\bullet\}$ à $\{\boldsymbol{e}'_\bullet\}$

Matrice $[A^\bullet{}_\bullet]$ de terme général $A^i{}_j$ (matrice régulière)

Inversement : $\quad \boldsymbol{e}_j = B^i{}_j\, \boldsymbol{e}'_i$

Matrice de passage de $\{\boldsymbol{e}'_\bullet\}$ à $\{\boldsymbol{e}_\bullet\}$

Matrice $[B^\bullet{}_\bullet]$ de terme général $B^i{}_j$

Relation entre les matrices de passage :

$$[B^\bullet{}_\bullet] = [A^\bullet{}_\bullet]^{-1}$$ (exercice, solution dans le pdf)

Changement de base (suite et fin)

Rappels : $e'_j = A^i{}_j e_i$ $\quad e_j = B^i{}_j e'_i$ $\quad [B^\bullet{}_\bullet] = [A^\bullet{}_\bullet]^{-1}$

Changement de base des composantes de v :

$$v = v^i e_i = v^i B^j{}_i e'_j = (v^i B^j{}_i) e'_j$$

$$v'^j = v^i B^j{}_i = B^j{}_i v^i \qquad \left(\Leftrightarrow \quad [v'^\bullet] = [B^\bullet{}_\bullet][v^\bullet] \right)$$

Contravariance des composantes $\{v^\bullet\}$

$e'_j = A^i{}_j e_i$ et $v'^j = B^j{}_i v^i$

Changement de base inverse

$e_j = B^i{}_j e'_i$ et $v^j = A^j{}_i v'^i$ (exercice)

Base duale

$\{\boldsymbol{e}^\bullet\}$, base duale de $\{\boldsymbol{e}_\bullet\}$

Les n vecteurs $\{\boldsymbol{e}^\bullet\}$ définis par : $\boldsymbol{e}^i \cdot \boldsymbol{e}_j = \delta^i_j$

Composantes covariantes d'un vecteur

Composantes de $\boldsymbol{v}$ sur la base duale : $\boldsymbol{v} = v_j \boldsymbol{e}^j \quad (= v^j \boldsymbol{e}_j)$

Propriétés :

$$v_k = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{e}_k \quad \text{et} \quad v^k = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{e}^k$$

(exercices, solutions dans le pdf)

Covariance des composantes $\{v_\bullet\}$

$$\boldsymbol{e}'_k = A^i{}_k \boldsymbol{e}_i \quad \text{et} \quad v'_k = A^i{}_k v_i$$

(exercice, solution dans le pdf)

Finalement :

$$\boldsymbol{v} = v^j \boldsymbol{e}_j = v_j \boldsymbol{e}^j = (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{e}_j)\boldsymbol{e}^j = (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{e}^j)\boldsymbol{e}_j$$

Tenseur

Tenseur d'ordre p

Application p-linéaire de $\mathbb{V}^p$ dans $\mathbb{R}$.

Rappel : linéarité

$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}',\boldsymbol{w},\cdots) = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w},\cdots) + \boldsymbol{T}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}',\boldsymbol{w},\cdots)$
et $\quad \boldsymbol{T}(\boldsymbol{u},\lambda\,\boldsymbol{v},\boldsymbol{w},\cdots) = \lambda\,\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w},\cdots)$
pour chaque vecteur argument de $\boldsymbol{T}$.

Exemples :

$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) = 3\boldsymbol{x}\cdot(2\boldsymbol{z}\wedge\boldsymbol{y})$ est un tenseur d'ordre 3.
$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) = 3\boldsymbol{x}\cdot(2\boldsymbol{z}+\boldsymbol{y})$ n'est pas un tenseur d'ordre 3.

Composantes d'un tenseur

Exemple pour un tenseur d'ordre 3 :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{T}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) &= \boldsymbol{T}(x^i\boldsymbol{e}_i, y^j\boldsymbol{e}_j, z^k\boldsymbol{e}_k) = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j,\boldsymbol{e}_k)\,x^i\,y^j\,z^k \qquad \text{(trilinéarité)} \\ &= \boldsymbol{T}(x^i\boldsymbol{e}_i, y_j\boldsymbol{e}^j, z_k\boldsymbol{e}^k) = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}^j,\boldsymbol{e}^k)\,x^i\,y_j\,z_k \end{aligned}$$

Composantes covariantes du tenseur

$$T_{ijk} = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j,\boldsymbol{e}_k) \qquad \text{(si } n=3\text{, un tenseur d'ordre 3 a 27 composantes)}$$

Les tenseurs d'ordre p ont n^p composantes.

Composantes d'autres variances :

$$T_i{}^{jk} = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}^j,\boldsymbol{e}^k)$$

$$T^{ij}{}_k = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}^i,\boldsymbol{e}^j,\boldsymbol{e}_k)$$

etc.

Application du tenseur T à 3 vecteurs :

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) = T_{ijk}\,x^i\,y^j\,z^k \quad = T_i{}^{jk}\,x^i\,y_j\,z_k \quad = T^{ij}{}_k\,x_i\,y_j\,z^k \quad = \cdots$$

Espace vectoriel des tenseurs d'ordre p

Addition de tenseurs de même ordre

$$(\boldsymbol{P}+\boldsymbol{Q})(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\cdots)=\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\cdots)+\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\cdots),\quad \forall(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\cdots)$$

Élément neutre : le tenseur nul $\quad \mathbf{0}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\cdots)=0,\quad \forall(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\cdots)$

Multiplication d'un tenseur par un réel

$$(\lambda\boldsymbol{P})(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\cdots)=\lambda\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\cdots),\quad \forall(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\cdots)$$

Élément neutre : le réel 1.

Théorème

Muni de ces deux opérations, l'ensemble des tenseurs d'ordre p est un espace vectoriel.

Notation : $\mathbb{V}^{\otimes p}$

On va construire des bases de l'espace vectoriel $\mathbb{V}^{\otimes p}$.

Produit tensoriel de vecteurs

Produit tensoriel de 2 vecteurs (« produit dyadique »)

$$(\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{w})(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{x})\,(\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{y}), \quad \forall\,(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$$

$\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{w}$ est un tenseur du second ordre. ($\otimes$ est non commutatif)

Composantes :

$$(\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{w})_{ij} = (\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{w})(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j) = (\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{e}_i)\,(\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{e}_j) = v_i\,w_j$$

Autres variances : (exercices)

$$(\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{w})^{ij} = v^i\,w^j \qquad (\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{w})^i{}_j = v^i\,w_j \qquad (\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{w})_i{}^j = v_i\,w^j$$

Produit tensoriel de p vecteurs

$$(\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{w}\otimes\cdots)(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z},\cdots) = (\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{x})\,(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{y})\,(\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{z})\,\cdots$$

$(\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{w}\otimes\cdots)$ est un tenseur d'ordre p.

Composantes : (pour un produit tensoriel de trois vecteurs)

$$(\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{w})_{ijk} = u_i\,v_j\,w_k \qquad (\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{w})_{ij}{}^k = u_i\,v_j\,w^k \qquad \text{etc.}$$

Une base pour les tenseurs d'ordre p

Démonstration pour $p = 3$

$$(\boldsymbol{e}^i \otimes \boldsymbol{e}^j \otimes \boldsymbol{e}^k)(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{e}^i \cdot \boldsymbol{x})\,(\boldsymbol{e}^j \cdot \boldsymbol{y})\,(\boldsymbol{e}^k \cdot \boldsymbol{z}) = x^i\, y^j\, z^k$$

Soit $\boldsymbol{T}$ un tenseur d'ordre 3 :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) &= T_{ijk}\, x^i\, y^j\, z^k \\ &= T_{ijk}\,(\boldsymbol{e}^i \otimes \boldsymbol{e}^j \otimes \boldsymbol{e}^k)(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}), \quad \forall\,(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})\end{aligned}$$

Finalement,

$$\boldsymbol{T} = T_{ijk}\,(\boldsymbol{e}^i \otimes \boldsymbol{e}^j \otimes \boldsymbol{e}^k)$$

Les nombres T_{ijk} sont les composantes (ici covariantes) du tenseur $\boldsymbol{T}$ (d'ordre 3) sur les n^3 tenseurs de base $\{\boldsymbol{e}^\bullet \otimes \boldsymbol{e}^\bullet \otimes \boldsymbol{e}^\bullet\}$.

Autres variances $\Rightarrow$ autres bases tensorielles :

$$\boldsymbol{T} = T_{ijk}\,(\boldsymbol{e}^i \otimes \boldsymbol{e}^j \otimes \boldsymbol{e}^k) = T_{ij}{}^{k}\,(\boldsymbol{e}^i \otimes \boldsymbol{e}^j \otimes \boldsymbol{e}_k) = \text{etc.}$$

(efficacité de la convention d'Einstein)

On généralise sans difficulté à l'ordre p. $\quad \dim(\mathbb{V}^{\otimes p}) = n^p$

Changement de base des composantes de tenseurs

Démonstration pour un tenseur d'ordre 3 :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{T} &= T_i{}^{jk}\, \boldsymbol{e}^i \otimes \boldsymbol{e}_j \otimes \boldsymbol{e}_k \\ &= T_i{}^{jk}\, (A^i{}_p\, \boldsymbol{e}'^p) \otimes (B^q{}_j\, \boldsymbol{e}'_q) \otimes (B^r{}_k\, \boldsymbol{e}'_r) \\ &= (A^i{}_p\, B^q{}_j\, B^r{}_k\, T_i{}^{jk})\, (\boldsymbol{e}'^p \otimes \boldsymbol{e}'_q \otimes \boldsymbol{e}'_r) \end{aligned}$$

$$T'_p{}^{qr} = A^i{}_p\, B^q{}_j\, B^r{}_k\, T_i{}^{jk}$$

Construction des formules de changement de base

- les indices covariants sont sommés avec des $A^\bullet{}_\bullet$,
- les indices contravariants sont sommés avec des $B^\bullet{}_\bullet$,
- en respectant les règles de la convention d'Einstein.

On généralise aisément à l'ordre p : il faut p termes $A^\bullet{}_\bullet$ ou $B^\bullet{}_\bullet$ selon les variances des composantes.

Tenseurs d'ordre 1

Rappel : Si $\boldsymbol{T}$ est un tenseur d'ordre 1, (forme linéaire)

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{T}(x^i \boldsymbol{e}_i) = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}_i)\, x^i = T_i\, x^i \qquad (\boldsymbol{T} \text{ a } n \text{ composantes})$$

Soit un vecteur $\boldsymbol{v}$. On définit l'application $\boldsymbol{\mathscr{V}} : \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ par :

$$\boldsymbol{\mathscr{V}}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{x} = (v_i \boldsymbol{e}^i) \cdot (x^j \boldsymbol{e}_j) = v_i\, x^j\, (\boldsymbol{e}^i \cdot \boldsymbol{e}_j) = v_i\, x^j\, \delta^i_j = v_i\, x^i$$

$\boldsymbol{\mathscr{V}}$ est un tenseur d'ordre 1 $\;\Rightarrow\;$ $\mathscr{V}(\boldsymbol{x}) = \mathscr{V}_i\, x^i = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{x} = v_i\, x^i, \quad \forall \boldsymbol{x}$

À tout vecteur $\boldsymbol{v}$ on associe le tenseur $\boldsymbol{\mathscr{V}}$ d'ordre 1 tel que :

$$\boldsymbol{\mathscr{V}}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{x} \qquad (\text{sur une base : } \mathscr{V}_i = v_i \text{ et } \mathscr{V}^i = v^i)$$

Cette association est biunivoque.

Théorème

Les tenseurs d'ordre 1 sont isomorphes aux vecteurs.

Désormais, on les confond et on écrit :

$$\underset{\uparrow}{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\mathscr{V}}(\boldsymbol{x}) = \mathscr{V}_i\, x^i = v_i\, x^i = v^i\, x_i = \underset{\uparrow}{\boldsymbol{v}} \cdot \boldsymbol{x}$$

$\boldsymbol{v}$: tenseur d'ordre 1 $\qquad\qquad$ $\boldsymbol{v}$: vecteur

Produit tensoriel de tenseurs

Rappel : Produit tensoriel de vecteurs (tenseurs d'ordre 1)

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{w})(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) &= (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{x})\,(\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{y}) \\ &= \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{w}(\boldsymbol{y})\end{aligned}$$

Produit tensoriel de tenseurs

Soient $\boldsymbol{P}$ d'ordre 3 et $\boldsymbol{Q}$ d'ordre 2 ; (par exemple)

$$(\boldsymbol{P} \otimes \boldsymbol{Q})(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})\,\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}), \ \ \forall (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$$

(dans cet exemple $(\boldsymbol{P} \otimes \boldsymbol{Q})$ est un tenseur d'ordre 5)

Si $\boldsymbol{P}$ est d'ordre p et $\boldsymbol{Q}$ est d'ordre q, $\boldsymbol{P} \otimes \boldsymbol{Q}$ est d'ordre $p+q$.

Composantes : (exemple pour $p=3$ et $q=2$)

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{P} \otimes \boldsymbol{Q})_{ijk\ell m} &= (\boldsymbol{P} \otimes \boldsymbol{Q})(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{e}_\ell, \boldsymbol{e}_m) \\ &= \boldsymbol{P}(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{e}_k)\,\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{e}_\ell, \boldsymbol{e}_m) \\ &= P_{ijk}\,Q_{\ell m}\end{aligned}$$

$$(\boldsymbol{P} \otimes \boldsymbol{Q})_{ij}{}^{k\ell}{}_m = P_{ij}{}^k\,Q^\ell{}_m \qquad \text{etc.}$$

Traces d'un tenseur

Soit $\boldsymbol{T}$ un tenseur d'ordre $p \geqslant 2$: $\quad \boldsymbol{T} = T_{ijk}{}^{\ell m}\,(\boldsymbol{e}^i \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{e}_m)$

On pose : $\quad K_{ij}{}^m = T_{ijk}{}^{km}$ $\quad$ (n^3 nombres calculés avec les n^5 composantes de $\boldsymbol{T}$)

Théorème

Les $K_{ij}{}^m$ sont les composantes d'un tenseur d'ordre 3.
(démonstration dans le pdf)

Définition : trace (r,s) d'un tenseur d'ordre $p \geqslant 2$

$\mathbf{tr}^{(r,s)}\boldsymbol{T}$: tenseur de composantes $T_{\cdots,i_{r-1},k,\cdots}{}^{\cdots,i_{s-1},k,\cdots}$

La trace d'un tenseur d'ordre p est un tenseur d'ordre $p-2$.

La trace d'un tenseur d'ordre 2 est d'ordre 0 ! (inutile de préciser r et s)

C'est la trace de la matrice des composantes mixtes.

Si $\boldsymbol{T}$ est d'ordre 2 : $\quad \mathrm{tr}\boldsymbol{T} = T_m{}^m = T^k{}_k$ $\quad$ (exercice)

Définition

Les tenseurs d'ordre 0 sont appelés scalaires ou invariants.

Produit contracté simple

Soient $\boldsymbol{P}$ d'ordre $p \geqslant 1$ et $\boldsymbol{Q}$ d'ordre $q \geqslant 1$.

Produit contracté simple de deux tenseurs

$$\boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{Q} = \mathbf{tr}^{(p,p+1)}(\boldsymbol{P} \otimes \boldsymbol{Q})$$

$\boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{Q}$ est un tenseur d'ordre $p+q-2$.

Propriétés

L'opérateur « . » est non commutatif : $\boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{Q} \neq \boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{P}$,
et distributif pour l'addition (à gauche et à droite).

Composantes :

Si $p = 3$ et $q = 2$: $(\boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{Q})_{ij}{}^{m} = P_{ijr}\, Q^{rm}$ $(p+q-2=3)$

Cas particulier :

Si $p = 1$ et $q = 1$ (vecteurs), alors $\boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{Q}$ est d'ordre 0.
C'est le produit scalaire de deux vecteurs :

$$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} = v_i\, w^i = v^i\, w_i$$ (commutativité seulement pour deux vecteurs)

Produit contracté double

Soient $\boldsymbol{P}$ d'ordre $p \geqslant 2$ et $\boldsymbol{Q}$ d'ordre $q \geqslant 2$.

Produit contracté double de deux tenseurs

$$\boldsymbol{P} : \boldsymbol{Q} = \mathbf{tr}^{(p-1,p)} \left(\mathbf{tr}^{(p,p+2)} (\boldsymbol{P} \otimes \boldsymbol{Q}) \right)$$

$\boldsymbol{P} : \boldsymbol{Q}$ est un tenseur d'ordre $p+q-4$.

Propriétés

L'opérateur « : » est non commutatif : $\boldsymbol{P} : \boldsymbol{Q} \neq \boldsymbol{Q} : \boldsymbol{P}$,
et distributif pour l'addition (à gauche et à droite).

Composantes :

si $p = 3$ et $q = 2$: $(\boldsymbol{P} : \boldsymbol{Q})_i = P_{imn} Q^{mn} = P_i{}^m{}_n Q_m{}^n = \cdots$

si $p = 2$ et $q = 2$: $\boldsymbol{P} : \boldsymbol{Q} = P_{mn} Q^{mn} = P^{mn} Q_{mn} = \cdots$ (d'ordre 0)

On généralise à des contractions triples ou plus (symbole : $\overline{\otimes}^r$).

Tenseur métrique

Tenseur du second ordre $\boldsymbol{G}$, défini par :

$$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}, \quad \forall(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$$

Composantes :

$$g_{ij} = \boldsymbol{G}(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j) = \boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j \qquad {g_i}^j = \boldsymbol{G}(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}^j) = \boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}^j = \delta_i^j$$

$$g^{ij} = \boldsymbol{G}(\boldsymbol{e}^i,\boldsymbol{e}^j) = \boldsymbol{e}^i\cdot\boldsymbol{e}^j \qquad {g^i}_j = \boldsymbol{G}(\boldsymbol{e}^i,\boldsymbol{e}_j) = \boldsymbol{e}^i\cdot\boldsymbol{e}_j = \delta^i_j$$

Propriétés des composantes :

- Les composantes mixtes sont les mêmes dans toute base :
  $${g_i}^j = {g^j}_i = \delta_i^j$$
- Les composantes non mixtes sont symétriques :
  $$g_{ij} = g_{ji} \qquad g^{ij} = g^{ji}$$
  (car « $\cdot$ » est commutatif pour les vecteurs)

Écritures du produit scalaire de deux vecteurs :

$$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} = \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{G}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{x} = \boldsymbol{G} : (\boldsymbol{x}\otimes\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{G} : (\boldsymbol{y}\otimes\boldsymbol{x})$$

$$= g_{ij}\,x^i\,y^j = g^{ij}\,x_i\,y_j = x^k\,y_k = x_m\,y^m$$

Application : « ascenseur d'indices »

Propriété du tenseur métrique :

$$\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{T}=\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{G}=\boldsymbol{T}, \quad \forall\boldsymbol{T}$$

(exercice, utiliser les composantes mixtes de G)

Propriété des composantes non mixtes de $\boldsymbol{G}$:

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{v}=g^{ij}\,v_j\,\boldsymbol{e}_i \quad \Leftrightarrow \quad v^i=g^{ij}\,v_j$$

$$=g_{ij}\,v^j\,\boldsymbol{e}^i \quad \Leftrightarrow \quad v_i=g_{ij}\,v^j$$

On en déduit que : $[g^{\bullet\bullet}]=[g_{\bullet\bullet}]^{-1}$

Règles de l'ascenseur d'indices

Pour « monter un indice » : sommation avec $g^{\bullet\bullet}$;
pour « descendre un indice » : sommation avec $g_{\bullet\bullet}$;
en respectant les conventions d'Einstein.

Exemples : $T_i{}^j{}_k=g^{jm}\,T_{imk}$ $\quad$ $\boldsymbol{e}_i=g_{ik}\,\boldsymbol{e}^k$ (exercices)

On sait changer la variance des composantes de tenseurs.

Tenseur d'orientation dans $\mathbb{V}_3$

Tenseur d'orientation (Levi-Civita)

Tenseur $\boldsymbol{H}$ d'ordre 3 défini par $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) = [\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}]$ (produit mixte)

Composantes :

$$h_{ijk} = \boldsymbol{H}(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j,\boldsymbol{e}_k) = [\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j,\boldsymbol{e}_k] \qquad h_{123} = \sqrt{\det[g_{\bullet\bullet}]} = \sqrt{g}$$

(démonstration dans le pdf)

$$h^{ijk} = \boldsymbol{H}(\boldsymbol{e}^i,\boldsymbol{e}^j,\boldsymbol{e}^k) = [\boldsymbol{e}^i,\boldsymbol{e}^j,\boldsymbol{e}^k] \qquad h^{123} = \sqrt{\det[g^{\bullet\bullet}]} = \frac{1}{\sqrt{g}}$$

Composantes d'un produit vectoriel :

$$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{y} = (x^i\,\boldsymbol{e}_i) \wedge (y^j\,\boldsymbol{e}_j) = x^i\,y^j\,\boldsymbol{e}_i \wedge \boldsymbol{e}_j$$

$$z_k = \boldsymbol{z} \cdot \boldsymbol{e}_k = x^i\,y^j\,(\boldsymbol{e}_i \wedge \boldsymbol{e}_j) \cdot \boldsymbol{e}_k = x^i\,y^j\,h_{ijk}$$

On en déduit : $\boldsymbol{z} = x^i\,y^j\,h_{ijk}\,\boldsymbol{e}^k = h_{kij}\,x^i\,y^j\,\boldsymbol{e}^k = \boldsymbol{H} : (\boldsymbol{x} \otimes \boldsymbol{y})$

On sait désormais écrire les composantes d'un produit vectoriel avec des sommations sur les composantes.

Identités :

$$(\boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{H})_{ij}{}^{mn} = \delta_i^m\,\delta_j^n - \delta_i^n\,\delta_j^m \qquad \boldsymbol{H} : \boldsymbol{H} = 2\boldsymbol{G}$$

Tenseurs du second ordre

Rappels :

$$\boldsymbol{T} = T^{ij}\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j = T_{ij}\boldsymbol{e}^i \otimes \boldsymbol{e}^j = T^i{}_j\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}^j = T_i{}^j\boldsymbol{e}^i \otimes \boldsymbol{e}_j$$ (égalités tensorielles)

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = T^{ij}x_i y_j = T_{ij}x^i y^j = T^i{}_j x_i y^j = T_i{}^j x^i y_j$$ (égalités scalaires)

$$= \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{y} = \boldsymbol{T} : (\boldsymbol{x}\otimes\boldsymbol{y})$$ (le scalaire exprimé avec des opérations tensorielles)

Produit scalaire dans $\mathbb{V}^{\otimes 2}$

« : » est un produit scalaire dans $\mathbb{V}^{\otimes 2}$ (démonstration dans le pdf)

Norme euclidienne dans $\mathbb{V}^{\otimes 2}$

$$\|\boldsymbol{T}\|^2 = \boldsymbol{T} : \boldsymbol{T} \quad \left(= T_{ij}T^{ij} = T_i{}^j T^i{}_j \right)$$

Transposé d'un tenseur du second ordre

$$\boldsymbol{T}^\top(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}), \quad \forall(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$$

Composantes du transposé : (exercices)

$$(T^\top)_{ij} = T_{ji} \qquad (T^\top)^{ij} = T^{ji} \qquad (T^\top)^i{}_j = T_j{}^i \qquad (T^\top)_i{}^j = T^j{}_i$$

Convention d'Einstein

Algèbre vectorielle

Tenseurs

Opérations tensorielles

Tenseurs fondamentaux

Tenseurs du second ordre

Symétrie/Antisymétrie dans $\mathbb{V}^{\otimes 2}$

Tenseur d'ordre 2 symétrique

$\boldsymbol{T}$ est symétrique si $\quad \boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}^\top$

Propriétés des composantes : (exercices)

$T_{ij} = T_{ji} \quad T^{ij} = T^{ji}$ (symétrie des composantes non mixtes)

$T^i{}_j = T_j{}^i \quad T_i{}^j = T^j{}_i$ (non symétrie des composantes mixtes, $[T^\bullet{}_\bullet] = [T_\bullet{}^\bullet]$)

$\mathbb{V}^{\otimes 2}_{sym}$ est un sous-espace vectoriel de dimension $n(n+1)/2$
(un exemple de base : les $n(n+1)/2$ tenseurs symétriques $\{\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j + \boldsymbol{e}_j \otimes \boldsymbol{e}_i\}$)

Tenseur d'ordre 2 antisymétrique

$\boldsymbol{T}$ est antisymétrique si $\quad \boldsymbol{T} = -\boldsymbol{T}^\top$

Propriétés des composantes : (exercices)

$T_{ij} = -T_{ji} \quad T^{ij} = -T^{ji}$ (antisymétrie des composantes non mixtes, diag. nulle)

$T^i{}_j = -T_j{}^i \quad T_i{}^j = -T^j{}_i$ (non antisymétrie des composants mixtes, $[T^\bullet{}_\bullet] = -[T_\bullet{}^\bullet]$)

$\mathbb{V}^{\otimes 2}_{asy}$ est un sous-espace vectoriel de dimension $n(n-1)/2$
(un exemple de base : les $n(n-1)/2$ tenseurs antisymétriques $\{\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j - \boldsymbol{e}_j \otimes \boldsymbol{e}_i\}$)

Parties symétrique et antisymétrique

Propriétés :

- Les sous-espaces $\mathbb{V}^{\otimes 2}_{sym}$ et $\mathbb{V}^{\otimes 2}_{asy}$ sont orthogonaux :
  $\forall \boldsymbol{S}$ symétrique, $\forall \boldsymbol{A}$ antisymétrique, $\boldsymbol{S} : \boldsymbol{A} = 0$ (exercice)
- Leur intersection est le tenseur nul.

Parties symétrique et antisymétrique

si $\boldsymbol{T} \in \mathbb{V}^{\otimes 2}$, $\boldsymbol{T} = \mathbf{sym}\,\boldsymbol{T} + \mathbf{asym}\,\boldsymbol{T}$

Cette décomposition est unique :

$$\mathbf{sym}\,\boldsymbol{T} = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{T} + \boldsymbol{T}^{\top}\right) \qquad \mathbf{asym}\,\boldsymbol{T} = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{T} - \boldsymbol{T}^{\top}\right)$$

Vecteur adjoint à un tenseur antisymétrique

On se limite à $n = 3$. Soit $\boldsymbol{A}$ d'ordre 2 antisymétrique.

Vecteur adjoint

$\boldsymbol{a} = \frac{1}{2}\boldsymbol{H} : \boldsymbol{A}$ composantes covariantes : $a_i = \frac{1}{2} h_{ijk} A^{jk}$

Propriété :

(exercice)

$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{a}$ composantes contravariantes : $A^{ij} = h^{ijk} a_k$

Isomorphisme $\boldsymbol{A} \leftrightarrow \boldsymbol{a}$

À tout tenseur antisymétrique $\boldsymbol{A}$ on associe un vecteur $\boldsymbol{a}$ unique et inversement.

Relation entre les composantes de $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{a}$:

$$[A^{\bullet\bullet}] = \frac{1}{\sqrt{g}} \begin{bmatrix} 0 & a_3 & -a_2 \\ -a_3 & 0 & a_1 \\ a_2 & -a_1 & 0 \end{bmatrix}$$

(exercice)

Endomorphismes linéaire de $\mathbb{V}$

Endomorphisme de $\mathbb{V}$: application linéaire $\mathbb{V} \to \mathbb{V}$

$\mathscr{L} : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ linéaire, $\quad \boldsymbol{w} = \mathscr{L}(\boldsymbol{v}) \qquad [w^\bullet] = [\mathscr{L}^\bullet{}_\bullet]\,[v^\bullet]$

Soit $\boldsymbol{T} \in \mathbb{V}^{\otimes 2}$. $\quad \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{v}$ est un vecteur (tenseur d'ordre 1).

À tout tenseur du second ordre $\boldsymbol{T}$, on associe l'endomorphisme linéaire $\mathscr{L}$ tel que : $\quad \mathscr{L}(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{v}, \quad \forall \boldsymbol{v}$

Composantes :

$$\boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{v} = T^i{}_j v^j \boldsymbol{e}_i = \mathscr{L}(\boldsymbol{v}) = \mathscr{L}^i{}_j v^j \boldsymbol{e}_i$$

La matrice $[\mathscr{L}^\bullet{}_\bullet]$ de l'endomorphisme $\mathscr{L}$ associé à $\boldsymbol{T}$ est identique aux composantes mixtes $[T^\bullet{}_\bullet]$ du tenseur $\boldsymbol{T}$.

Isomorphisme $\mathscr{L} \leftrightarrow \boldsymbol{T}$

Les endomorphismes linéaires et les tenseurs du second ordre sont isomorphes. On écrira : $\quad \boldsymbol{T}(\boldsymbol{v}) = \mathscr{L}(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{v}$

Tenseur sphérique

$\boldsymbol{S}$ est sphérique si $\quad \boldsymbol{S} = \alpha \boldsymbol{G} \quad$ (α scalaire)

$\mathbb{V}^{\otimes 2}_{sph}$ est un sous-espace vectoriel de dimension 1.

Tenseur de trace nulle (« déviateur »)

$\boldsymbol{D}$ est un « déviateur » si $\quad \mathrm{tr}\boldsymbol{D} = 0$

$\mathbb{V}^{\otimes 2}_{dev}$ est un sous-espace vectoriel de dimension $n^2 - 1$.

Les sous-espaces $\mathbb{V}^{\otimes 2}_{sph}$ et $\mathbb{V}^{\otimes 2}_{dev}$ sont orthogonaux : $\quad \boldsymbol{S} : \boldsymbol{D} = 0$

Parties sphérique et « déviatorique »

Si $\boldsymbol{T} \in \mathbb{V}^{\otimes 2}$ $\quad \boldsymbol{T} = \mathbf{sph}\,\boldsymbol{T} + \mathbf{dev}\,\boldsymbol{T}$

Cette décomposition est unique. (exercice)

$$\mathbf{sph}\,\boldsymbol{T} = \frac{\mathrm{tr}\boldsymbol{T}}{n}\boldsymbol{G} \qquad \mathbf{dev}\,\boldsymbol{T} = \left(\boldsymbol{T} - \frac{\mathrm{tr}\boldsymbol{T}}{n}\boldsymbol{G}\right)$$

Opérations algébriques dans $\mathbb{V}^{\otimes 2}$

- **Contraction simple :** $\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{U} \in \mathbb{V}^{\otimes 2}$ (« $\cdot$ » est une opération interne)
- **Produit scalaire :** $\boldsymbol{T} : \boldsymbol{U} \in \mathbb{V}^{\otimes 0}$
- **« Produit mixte » :**
  $\boldsymbol{A} : (\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{B} : (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}^{\top}) = \boldsymbol{C} : (\boldsymbol{B}^{\top}\cdot\boldsymbol{A}) = \cdots \in \mathbb{V}^{\otimes 0}$ (exercices)
- **Puissance entière :** $\boldsymbol{T}^p = \boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{T}\cdot\ldots$ $\quad(\boldsymbol{T}^0 = \boldsymbol{G})$
- **Exponentielle :** $\mathbf{e}^{\boldsymbol{T}} = \sum_{q=0}^{\infty}\frac{\boldsymbol{T}^q}{q!} = \boldsymbol{G} + \sum_{q=1}^{\infty}\frac{\boldsymbol{T}^q}{q!}$
  Attention : $\mathbf{e}^{\boldsymbol{T}}\cdot\mathbf{e}^{\boldsymbol{T}'} \neq \mathbf{e}^{\boldsymbol{T}+\boldsymbol{T}'}$ (sauf si $\exists$ une base propre commune)
- **Déterminant :**
  $\det\boldsymbol{T} = \det[\mathscr{L}^{\bullet}{}_{\bullet}] = \det[T^{\bullet}{}_{\bullet}] = \det[T_{\bullet}{}^{\bullet}] \neq \underbrace{\det[T^{\bullet\bullet}] \neq \det[T_{\bullet\bullet}]}_{\text{(non scalaires)}}$
- **Inverse :** si $\det\boldsymbol{T} \neq 0$, $\quad \boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{T}^{-1} = \boldsymbol{G}$
  $[(T^{-1})^{\bullet}{}_{\bullet}] = [T^{\bullet}{}_{\bullet}]^{-1} \qquad [(T^{-1})_{\bullet}{}^{\bullet}] = [T_{\bullet}{}^{\bullet}]^{-1}$
  $[(T^{-1})^{\bullet\bullet}] = [T_{\bullet\bullet}]^{-1} \qquad [(T^{-1})_{\bullet\bullet}] = [T^{\bullet\bullet}]^{-1}$ (exercices)
- **Puissance entière négative :** si $\det\boldsymbol{T} \neq 0$, $\quad \boldsymbol{T}^{-q} = (\boldsymbol{T}^{-1})^q$

Propriétés spectrales dans $\mathbb{V}_3^{\otimes 2}$

Ce sont les proriétés spectrales de l'endomorphisme linéaire associé à $\boldsymbol{T}$. (voir tout cours d'algèbre linéaire)

Valeurs propres : elles sont les solutions de

$$0 = \det\left([\mathscr{L}^{\bullet}{}_{\bullet}] - \lambda\,[I]\right) = \det\left([\boldsymbol{T}^{\bullet}{}_{\bullet}] - \lambda\,[I]\right) = \det(\boldsymbol{T} - \lambda\,\boldsymbol{G})$$

En développant le déterminant :

$$0 = -\lambda^3 + T_{\mathrm{I}}\,\lambda^2 - T_{\mathrm{II}}\,\lambda + T_{\mathrm{III}}$$ (polynôme caractéristique)

où : $T_{\mathrm{I}} = \operatorname{tr}\boldsymbol{T}$ $\qquad T_{\mathrm{II}} = \frac{1}{2}\left((\operatorname{tr}\boldsymbol{T})^2 - \operatorname{tr}(\boldsymbol{T}^2)\right)$ $\qquad T_{\mathrm{III}} = \det\boldsymbol{T}$

Invariants fondamentaux : $\{T_{\mathrm{I}}, T_{\mathrm{II}}, T_{\mathrm{III}}\}$

(dans le pdf, il y a d'autres définitions des invariants fondamentaux, équivalentes et très utiles)

Dans $\mathbb{V}_3^{\otimes 2}$, il y a toujours une valeur propre réelle.
Les deux autres sont soit réelles, soit complexes conjuguées.

Théorème de Cayley-Hamilton

$$-\boldsymbol{T}^3 + T_{\mathrm{I}}\,\boldsymbol{T}^2 - T_{\mathrm{II}}\,\boldsymbol{T} + T_{\mathrm{III}}\,\boldsymbol{G} = \boldsymbol{0}$$

Propriétés spectrales des tenseurs symétriques

Si de plus $\boldsymbol{S}$ est symétrique :

- les 3 valeurs propres sont réelles ;
- les espaces propres associés sont orthogonaux entre eux ;
- on peut construire des bases propres orthonormées $\{\widetilde{\boldsymbol{e}}_\bullet\}$;
- dans $\{\widetilde{\boldsymbol{e}}_\bullet\}$, la matrice des composantes est diagonale ;
  $$\boldsymbol{S} = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i \, \widetilde{\boldsymbol{e}}_i \otimes \widetilde{\boldsymbol{e}}_i$$
- $\boldsymbol{S}^q$ et $\mathbf{e}^{\boldsymbol{S}}$ ont les mêmes directions propres que $\boldsymbol{S}$;
- leurs valeurs propres sont respectivement $(\lambda_\bullet)^q$ et $\mathrm{e}^{(\lambda_\bullet)}$;
- si $\boldsymbol{S}$ et $\boldsymbol{S}'$ ont une base propre commune :
  $$\boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{S}' = \boldsymbol{S}' \cdot \boldsymbol{S} \quad \text{et} \quad \mathbf{e}^{\boldsymbol{S}} \cdot \mathbf{e}^{\boldsymbol{S}'} = \mathbf{e}^{\boldsymbol{S}+\boldsymbol{S}'}$$
- les invariants fondamentaux s'écrivent aussi :
  $$S_{\mathrm{I}} = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \quad S_{\mathrm{II}} = \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_1 \quad S_{\mathrm{III}} = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$$

  (les formules inverses sont données dans l'annexe A du pdf)

Propriétés spectrales des tenseurs symétriques définis positifs

Rappel : $\boldsymbol{S} = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i \, \widetilde{\boldsymbol{e}}_i \otimes \widetilde{\boldsymbol{e}}_i \quad (\{\widetilde{\boldsymbol{e}}_\bullet\}$: base orthonormée)

Tenseur symétrique défini positif

$\boldsymbol{S}$ est symétrique défini positif si $\quad \boldsymbol{S}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}) > 0, \quad \forall \boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$

Théorème

Les valeurs propres d'un tenseur symétrique défini positif sont strictement positives.

Opérations algébriques supplémentaires :

- Puissance réelle : $\boldsymbol{S}^x = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i^x \, \widetilde{\boldsymbol{e}}_i \otimes \widetilde{\boldsymbol{e}}_i \quad x \in \mathbb{R}$
- Racine p^e : $\sqrt[p]{\boldsymbol{S}} = \boldsymbol{S}^{\frac{1}{p}} = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i^{\frac{1}{p}} \, \widetilde{\boldsymbol{e}}_i \otimes \widetilde{\boldsymbol{e}}_i \quad p \in \mathbb{N}$
- Logarithme : $\ln \boldsymbol{S} = \sum_{i=1}^{3} \ln \lambda_i \, \widetilde{\boldsymbol{e}}_i \otimes \widetilde{\boldsymbol{e}}_i$

Tenseurs orthogonaux

Tenseur orthogonal

$\boldsymbol{Q}$ est orthogonal si $\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{Q}^\top = \boldsymbol{G} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{Q}^{-1} = \boldsymbol{Q}^\top$

Notation : $\boldsymbol{Q} \in \mathbb{Q}$

Conséquence : $\det\boldsymbol{Q} = \pm 1$

- si $\det\boldsymbol{Q} = 1$, $\boldsymbol{Q}$ est une rotation ; notation : $\boldsymbol{Q} \in \mathbb{Q}_+$;
- si $\det\boldsymbol{Q} = -1$, $\boldsymbol{Q}$ est un retournement.

Propriétés : (exercices, solutions dans le pdf)

- $\mathbb{Q}$ est un groupe non commutatif pour l'opération « $\cdot$ » ;
- $\boldsymbol{T}$ et $\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{Q}^\top$ ont les mêmes valeurs propres ;
- $\boldsymbol{u}_\lambda$ vect. pr. de $\boldsymbol{T} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{u}_\lambda$ vect. pr. de $\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{Q}^\top$
- $\forall(\boldsymbol{Q},\boldsymbol{Q}') \in \mathbb{Q}_+ : \quad \boldsymbol{Q}^\top \in \mathbb{Q}_+ \quad \boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{Q}' \in \mathbb{Q}_+ \quad \boldsymbol{Q}^q \in \mathbb{Q}_+$
- $\mathbb{Q}_+$ est un sous-groupe de $\mathbb{Q}$.

Rotations

Rappel : $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}^\top$ et $\det \boldsymbol{Q} = +1.$

Propriétés : (démonstrations dans le pdf)

- Spectre : $\lambda_1 = 1 \quad ; \quad \lambda_2 = \mathrm{e}^{i\theta} \quad ; \quad \lambda_3 = \mathrm{e}^{-i\theta}$
- Invariants : $Q_{\mathrm{I}} = 1 + 2\cos\theta \qquad Q_{\mathrm{II}} = Q_{\mathrm{I}} \qquad Q_{\mathrm{III}} = 1$
- Forme tensorielle :
$$\boldsymbol{Q} = \underbrace{\cos\theta\,\boldsymbol{G} + (1-\cos\theta)\,\widetilde{\boldsymbol{w}} \otimes \widetilde{\boldsymbol{w}}}_{\mathbf{sym}\boldsymbol{Q}} \underbrace{-\sin\theta\,\boldsymbol{H}\cdot\widetilde{\boldsymbol{w}}}_{\mathbf{asym}\boldsymbol{Q}}$$
- Angle de la rotation : $\cos\theta = \dfrac{Q_{\mathrm{I}} - 1}{2} \quad (\theta \in [0;\pi])$
- Axe de la rotation : $\widetilde{\boldsymbol{w}} = -\dfrac{\boldsymbol{H} : \boldsymbol{Q}}{\sin\theta}$ (vecteur unitaire)

  ($\widetilde{\boldsymbol{w}}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre réelle $\lambda_1 = 1$)
- Petite rotation : $(\theta \ll 1) \qquad \boldsymbol{\delta Q} \simeq \boldsymbol{G} - \theta\,\boldsymbol{H}\cdot\widetilde{\boldsymbol{w}}$

Décompositions polaires

Théorème

Tout tenseur du second ordre inversible $\boldsymbol{T}$ peut s'écrire de manière unique : $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{Q}$ ou $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{U}$
où $\boldsymbol{Q}$ est orthogonal, $\boldsymbol{U}$ et $\boldsymbol{V}$ sont symétriques définis positifs.

La décomposition est :

$$\boldsymbol{V} = \sqrt{\boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{T}^\top} \qquad \boldsymbol{U} = \sqrt{\boldsymbol{T}^\top \cdot \boldsymbol{T}} \qquad \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{V}^{-1} \cdot \boldsymbol{T} = \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{U}^{-1}$$

Remarque : si $\det \boldsymbol{T} > 0$, $\boldsymbol{Q}$ est une rotation.

Terminologie : $\boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{Q}$: décomposition polaire à gauche,
$\boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{U}$: décomposition polaire à droite.

Relations entre $\boldsymbol{U}$ et $\boldsymbol{V}$: (démonstrations dans le pdf)

- $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{Q}^\top \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{U} = \boldsymbol{Q}^\top \cdot \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{Q}$
- $\boldsymbol{V}$ et $\boldsymbol{U}$ ont les mêmes valeurs propres (positives),
- si $\boldsymbol{u}$ est vect. pr. de $\boldsymbol{U}$, alors $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{u}$ est vect. pr. de $\boldsymbol{V}$
- En résumé : $\boldsymbol{V} = \mathscr{R}_{\boldsymbol{Q}}(\boldsymbol{U}) \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{U} = \mathscr{R}_{\boldsymbol{Q}^\top}(\boldsymbol{V})$

Tenseurs uniaxiaux

Tenseur uniaxial

$\boldsymbol{U}$ est dit uniaxial s'il existe un vecteur $\boldsymbol{u}$ tel que $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u}$

Propriétés :

- $\boldsymbol{U}$ est symétrique,
- $\boldsymbol{U}$ a une seule valeur propre non nulle : $\|\boldsymbol{u}\|^2$,
- l'espace propre associé à $\|\boldsymbol{u}\|^2$ est la droite engendrée par $\boldsymbol{u}$.

Tenseur uniaxial unitaire

$\exists\, \widetilde{\boldsymbol{u}}$ unitaire tel que : $\widetilde{\boldsymbol{U}} = \widetilde{\boldsymbol{u}} \otimes \widetilde{\boldsymbol{u}}$

Caractérisation : $\widetilde{U}_{\mathrm{I}} = 1$ et $\widetilde{U}_{\mathrm{II}} = 0$ et $\widetilde{U}_{\mathrm{III}} = 0$

Un tenseur uniaxial unitaire est le représentant unique d'une direction non orientée de l'espace. (bijection)

Exemple : $\boldsymbol{S} = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i\, \widetilde{\boldsymbol{u}}_i \otimes \widetilde{\boldsymbol{u}}_i = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i\, \widetilde{\boldsymbol{U}}_i$

En bref ...

- Tenseur d'ordre p : Application p-linéaire $\mathbb{V}^p \to \mathbb{R}$
- Espace vectoriel des tenseurs d'ordre p (bases, composantes, variances)
- Produit tensoriel : $\boldsymbol{P} \otimes \boldsymbol{Q}$, d'ordre $p+q$
- Traces : $\mathrm{tr}^{(r,s)} \boldsymbol{P}$, d'ordre $p-2$
- Produit contracté simple : $\boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{Q}$, d'ordre $p+q-2$
- Produit contracté double : $\boldsymbol{P} : \boldsymbol{Q}$, d'ordre $p+q-4$
- Tenseur d'ordre 0 : scalaire (ou invariant)
- Tenseur d'ordre 1 : vecteur
- Tenseur métrique : $\boldsymbol{G}$ d'ordre 2
- Tenseur d'orientation : $\boldsymbol{H}$ d'ordre 3 (seulement pour $n=3$)
- Tenseur d'ordre 2 : application linéaire $\mathbb{V} \to \mathbb{V}$
  - partie symétrique et antisymétrique,
  - partie sphérique et déviatorique,
  - valeurs propres et directions propres,
  - tenseur orthogonal : rotation si $\det \boldsymbol{Q} = 1$,
  - décomposition polaire,
  - tenseur uniaxial unitaire : direction non orientée.

Seconde partie

Fonctions tensorielles

Tenseurs fonction du temps

$$t \in \mathbb{R} \;\rightarrow\; \boldsymbol{T}(t) \in \mathbb{V}^{\otimes p}$$

Dérivée temporelle

$$\dot{\boldsymbol{T}}(t) = \lim_{t' \to t} \frac{\boldsymbol{T}(t') - \boldsymbol{T}(t)}{t' - t} \qquad \left(= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}t} \right)$$

Dérivation de produits : (exercices)

$$(\boldsymbol{T} \otimes \boldsymbol{U})^{\cdot} = \dot{\boldsymbol{T}} \otimes \boldsymbol{U} + \boldsymbol{T} \otimes \dot{\boldsymbol{U}} \qquad (\boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{U})^{\cdot} = \dot{\boldsymbol{T}} \cdot \boldsymbol{U} + \boldsymbol{T} \cdot \dot{\boldsymbol{U}}$$

$$(\boldsymbol{T} : \boldsymbol{U})^{\cdot} = \dot{\boldsymbol{T}} : \boldsymbol{U} + \boldsymbol{T} : \dot{\boldsymbol{U}}$$

Propriétés : (exercices)

- Conservation de la transposition, de la symétrie, de l'antisymétrie, de la sphéricité, de la trace nulle.
- Non conservation de la norme, de l'uniaxialité, de l'orthogonalité.

$$\boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{Q}^{\top} = \boldsymbol{G} \quad \Rightarrow \quad \dot{\boldsymbol{Q}} \cdot \boldsymbol{Q}^{\top} + \boldsymbol{Q} \cdot \dot{\boldsymbol{Q}}^{\top} = \boldsymbol{0}$$

$$\Rightarrow \quad \dot{\boldsymbol{Q}} \cdot \boldsymbol{Q}^{\top} \text{ est antisymétrique.}$$

Variations temporelles du spectre des tenseurs symétriques d'ordre 2

Soit $\boldsymbol{S}(t)$ un tenseur symétrique $(n=3)$ $\qquad \boldsymbol{S}(t) = S_{ij}(t)\,\boldsymbol{e}^i \otimes \boldsymbol{e}^j$
Soit $\dot{\boldsymbol{S}}(t)$ sa dérivée temporelle $\qquad \dot{\boldsymbol{S}}(t) = \dot{S}_{ij}(t)\,\boldsymbol{e}^i \otimes \boldsymbol{e}^j$
Valeurs propres : $\{\lambda_\bullet(t)\}$; une base propre orthonormée :$\{\widetilde{\boldsymbol{e}}_\bullet(t)\}$

Question : Comment évoluent les valeurs propres et les directions propres de $\boldsymbol{S}$?

Réponse : (démonstrations dans le pdf)

- Décomposition de $\dot{\boldsymbol{S}}$: $\quad \dot{\boldsymbol{S}} = \hat{\boldsymbol{S}} + \breve{\boldsymbol{S}}$, où :
  - $\hat{\boldsymbol{S}}$: dérivée à directions propres constantes (seuls les $\{\lambda_\bullet\}$ varient)
  - $\breve{\boldsymbol{S}}$: dérivée à valeurs propres constantes (seuls les $\{\widetilde{\boldsymbol{e}}_\bullet\}$ varient)
- Vitesse de rotation des bases propres : $\boldsymbol{\omega}$, solution de :

$$\underbrace{\boldsymbol{H} : \mathbf{asym}(\boldsymbol{S}\cdot\dot{\boldsymbol{S}})}_{\text{ordre 1}} = \Big(\underbrace{-(\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{S}) : (\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{H}) + (\boldsymbol{S}:\boldsymbol{S})\,\boldsymbol{G} - \boldsymbol{S}^2}_{\text{ordre 2}}\Big)\cdot\boldsymbol{\omega}$$

- Dérivée temporelle des valeurs propres :

$$\boldsymbol{\Omega} = -\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{\omega} \quad ; \quad \breve{\boldsymbol{S}} = \boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{S} - \boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\Omega} \quad ; \quad \hat{\boldsymbol{S}} = \dot{\boldsymbol{S}} - \breve{\boldsymbol{S}}$$

  Les valeurs propres de $\hat{\boldsymbol{S}}$ sont les $\{\dot{\lambda}_\bullet(t)\}$.

Scalaires fonction d'un tenseur

$$\boldsymbol{T} \in \mathbb{V}^{\otimes p} \;\to\; f(\boldsymbol{T}) \in \mathbb{R}$$

Différentiabilité de f :

f est différentiable s'il existe un tenseur $\boldsymbol{\nabla} f$ tel que :

$$f(\boldsymbol{T}+\mathbf{d}\boldsymbol{T}) - f(\boldsymbol{T}) = \boldsymbol{\nabla} f \overline{\otimes}^{p}\, \mathbf{d}\boldsymbol{T} + \|\mathbf{d}\boldsymbol{T}\|\, \mathscr{O}(\mathbf{d}\boldsymbol{T}), \quad \forall\, \mathbf{d}\boldsymbol{T}$$

Vocabulaire :

$\boldsymbol{\nabla} f$: opérateur linéaire tangent ; $\boldsymbol{\nabla} f$ est d'ordre p.

$\mathrm{d}f = \boldsymbol{\nabla} f \overline{\otimes}^{p}\, \mathbf{d}\boldsymbol{T}$: différentielle de f ($\mathrm{d}f$ et $\mathbf{d}\boldsymbol{T}$ ne sont pas « petits »)

Composantes de $\boldsymbol{\nabla} f$: ex. si $\boldsymbol{T}$ d'ordre 2 : $\boldsymbol{T} = T^{i}{}_{j}\, \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}^j$

$$f(\boldsymbol{T}) = \bar{f}(T^{1}{}_{1},\cdots) = \bar{f}(T^{\bullet}{}_{\bullet})$$ ($\bar{f}$ fonction des n^2 composantes)

$$\mathrm{d}f = (\boldsymbol{\nabla} f)_i{}^j\, \mathrm{d}T^{i}{}_{j} = \mathrm{d}\bar{f} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial T^{i}{}_{j}}\, \mathrm{d}T^{i}{}_{j}$$

$$(\boldsymbol{\nabla} f)_i{}^j = \frac{\partial \bar{f}(T^{\bullet}{}_{\bullet})}{\partial T^{i}{}_{j}} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\nabla} f = \frac{\partial \bar{f}(T^{\bullet}{}_{\bullet})}{\partial T^{i}{}_{j}}\, \boldsymbol{e}^i \otimes \boldsymbol{e}_j$$

(autre notation : $\boldsymbol{\nabla} f = \frac{\mathrm{d}f}{\mathbf{d}\boldsymbol{T}}$; $\mathrm{d}f = \frac{\mathrm{d}f}{\mathbf{d}\boldsymbol{T}} \overline{\otimes}^{p}\, \mathbf{d}\boldsymbol{T}$)

Dérivée directionnelle

Rappel : différentiabilité de $f(\boldsymbol{T})$

$$f(\boldsymbol{T}+\mathbf{d}\boldsymbol{T})-f(\boldsymbol{T}) = \boldsymbol{\nabla} f \,\overline{\otimes}^p\, \mathbf{d}\boldsymbol{T} + \|\mathbf{d}\boldsymbol{T}\|\,\mathscr{O}(\mathbf{d}\boldsymbol{T}), \quad \forall\, \mathbf{d}\boldsymbol{T}$$

$$\frac{f(\boldsymbol{T}+\mathbf{d}\boldsymbol{T})-f(\boldsymbol{T})}{\|\mathbf{d}\boldsymbol{T}\|} = \boldsymbol{\nabla} f \,\overline{\otimes}^p\, \frac{\mathbf{d}\boldsymbol{T}}{\|\mathbf{d}\boldsymbol{T}\|} + \mathscr{O}(\mathbf{d}\boldsymbol{T}), \quad \forall\, \mathbf{d}\boldsymbol{T}$$

Le tenseur $\frac{\mathbf{d}\boldsymbol{T}}{\|\mathbf{d}\boldsymbol{T}\|}$ est unitaire $\left(\left\|\frac{\mathbf{d}\boldsymbol{T}}{\|\mathbf{d}\boldsymbol{T}\|}\right\| = 1\right)$.

Quand $\mathbf{d}\boldsymbol{T} \to \mathbf{0}$, $\frac{\mathbf{d}\boldsymbol{T}}{\|\mathbf{d}\boldsymbol{T}\|} \to \boldsymbol{T}_0$ unitaire.

Dérivée de f dans la direction tensorielle unitaire $\boldsymbol{T}_0$:

$$f'_{\boldsymbol{T}_0} = \lim_{\|\mathbf{d}\boldsymbol{T}\|\to 0,\, \frac{\mathbf{d}\boldsymbol{T}}{\|\mathbf{d}\boldsymbol{T}\|}\to \boldsymbol{T}_0} \frac{f(\boldsymbol{T}+\mathbf{d}\boldsymbol{T})-f(\boldsymbol{T})}{\|\mathbf{d}\boldsymbol{T}\|}$$

$$f'_{\boldsymbol{T}_0} = \boldsymbol{\nabla} f \,\overline{\otimes}^p\, \boldsymbol{T}_0 \quad \text{où} \quad \boldsymbol{T}_0 \in \mathbb{V}^{\otimes p} \quad \text{et} \quad \|\boldsymbol{T}_0\| = 1$$

$\boldsymbol{T}(t)$
$f(\boldsymbol{T})$
$f(\boldsymbol{T}_1,\cdots)$
Fonctions isotropes
$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{Q},\cdots)$

Contraintes sur les composantes d'un tenseur :

$$T^p{}_{qr} = h^p{}_{qr}(T^\bullet{}_{\bullet\bullet}) \qquad \text{(les } n^3 \text{ variables de } \bar{f}(T^\bullet{}_{\bullet\bullet}) \text{ sont liées)}$$

Théorème (démonstration dans le pdf)

Si les contraintes sur les composantes d'un tenseur sont de la forme $T^p{}_{qr} = h^p{}_{qr}(T^\bullet{}_{\bullet\bullet})$, on peut calculer les composantes de $\boldsymbol{\nabla} f$ en ignorant les contraintes et les rétablir après dérivation.

$$(\boldsymbol{\nabla} f)_i^{\;jk} = \left[\frac{\partial \bar{f}(T^\bullet{}_{\bullet\bullet})}{\partial T^i{}_{jk}}\right]_{(T^p{}_{qr}=h^p{}_{qr}(T^\bullet{}_{\bullet\bullet}))}$$

Exemples :

- Contrainte de symétrie : $f(\boldsymbol{T})$ avec $\boldsymbol{T}$ symétrique,

$$(\boldsymbol{\nabla} f)_{ij} = \left[\frac{\partial \bar{f}(T^{\bullet\bullet})}{\partial T^{ij}}\right]_{(T^{21}=T^{12}\,;\,T^{32}=T^{23}\,;\,T^{13}=T^{31})}$$

- Théorème applicable pour les contraintes de symétrie, d'antisymétrie, de sphéricité, de trace nulle.
- Théorème non applicable pour les contraintes d'orthogonalité, d'uniaxialité ou de norme.

Scalaire fonction de plusieurs tenseurs

$f(\boldsymbol{T}_1,\boldsymbol{T}_2,\cdots,\boldsymbol{T}_m)$ où $\boldsymbol{T}_i$ est d'ordre $p_i \geqslant 0$

Opérateur linéaire tangent partiel : $\boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{T}_i} f$ (seul $\boldsymbol{T}_i$ varie)

$$\mathrm{d}f = \sum_{i=1}^{m} (\boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{T}_i} f) \overline{\otimes}^{p_i} \mathbf{d}\boldsymbol{T}_i \qquad \boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{T}_i} f \text{ est d'ordre } p_i$$

Quelques applications utiles : (exercices)

- Variables vectorielles
  $\boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{w} \qquad \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}) = 2\boldsymbol{v} \qquad \boldsymbol{\nabla}\|\boldsymbol{v}\| = \frac{\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{v}\|}$
- Variables tensorielles d'ordre 2
  $\boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{T}:\boldsymbol{U}) = \boldsymbol{U} \qquad \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{T}:\boldsymbol{T}) = 2\boldsymbol{T} \qquad \boldsymbol{\nabla}\|\boldsymbol{T}\| = \frac{\boldsymbol{T}}{\|\boldsymbol{T}\|}$
  $\boldsymbol{\nabla}T_{\mathrm{I}} = \boldsymbol{G} \qquad \boldsymbol{\nabla}T_{\mathrm{II}} = T_{\mathrm{I}}\boldsymbol{G} - \boldsymbol{T}^{\top} \qquad \boldsymbol{\nabla}T_{\mathrm{III}} = T_{\mathrm{II}}\boldsymbol{G} - T_{\mathrm{I}}\boldsymbol{T}^{\top} + \boldsymbol{T}^{2\top}$
  $= T_{\mathrm{III}}\boldsymbol{T}^{-\top}$ (si $\boldsymbol{T}$ inversible)
- Dérivées temporelles
  $\|\boldsymbol{v}\|^{\cdot} = \frac{\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{v}\|}\cdot\dot{\boldsymbol{v}} \qquad \|\boldsymbol{T}\|^{\cdot} = \frac{\boldsymbol{T}}{\|\boldsymbol{T}\|}:\dot{\boldsymbol{T}} \qquad \dot{T}_{\mathrm{I}} = \boldsymbol{G}:\dot{\boldsymbol{T}} = \mathrm{tr}\,\dot{\boldsymbol{T}}$
  $\dot{T}_{\mathrm{II}} = (T_{\mathrm{I}}\boldsymbol{G} - \boldsymbol{T}^{\top}):\dot{\boldsymbol{T}} \qquad \dot{T}_{\mathrm{III}} = (T_{\mathrm{II}}\boldsymbol{G} - T_{\mathrm{I}}\boldsymbol{T}^{\top} + \boldsymbol{T}^{2\top}):\dot{\boldsymbol{T}}$
  $= T_{\mathrm{III}}\boldsymbol{T}^{-\top}:\dot{\boldsymbol{T}}$ (si $\boldsymbol{T}$ inversible)

Fonctions scalaires isotropes

Rappel : rotation par $\boldsymbol{Q} \in \mathbb{Q}_+$ d'un tenseur

$$\mathscr{R}_{\boldsymbol{Q}}(x) = x \qquad \mathscr{R}_{\boldsymbol{Q}}(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{v} \qquad \mathscr{R}_{\boldsymbol{Q}}(\boldsymbol{T}) = \boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{Q}^\top \qquad \cdots$$

Soit $f(\boldsymbol{T}_1,\boldsymbol{T}_2,\cdots) \in \mathbb{R}$ (les ordres des tenseurs sont *a priori* différents)

Fonction scalaire isotrope

La fonction f est isotrope si

$$f(\boldsymbol{T}_1,\boldsymbol{T}_2,\cdots) = f(\mathscr{R}_{\boldsymbol{Q}}(\boldsymbol{T}_1),\mathscr{R}_{\boldsymbol{Q}}(\boldsymbol{T}_2),\cdots), \quad \forall \boldsymbol{Q} \in \mathbb{Q}_+$$

Théorème (Boehler,Spencer,Wang ...)

Si f est isotrope, alors il existe une fonction $\bar{f}$ telle que

$$f(\boldsymbol{T}_1,\boldsymbol{T}_2,\cdots) = \bar{f}(I_1,I_2,\cdots,I_m)$$

où les $\{I_\bullet\}$ sont des invariants calculés avec les tenseurs $\{\boldsymbol{T}_\bullet\}$.
(la –longue– démonstration est en annexe B du pdf)

Les scalaires $\{I_\bullet\}$ sont :

- soit des invariants propres à chaque tenseur $\boldsymbol{T}_\bullet$,
- soit des invariants « croisés », reflétant les orientations relatives entre les tenseurs $\{\boldsymbol{T}_\bullet\}$.

Quelques résultats sur les fonctions isotropes

Notations :

$\boldsymbol{v}$ et $\boldsymbol{w}$ sont des vecteurs,
$\boldsymbol{S}$ est un tenseur symétrique.

Fonctions à un seul argument :

$f(\boldsymbol{v})$ isotrope $\quad\Rightarrow\quad f(\boldsymbol{v}) = \bar{f}(\|\boldsymbol{v}\|)$

$f(\boldsymbol{S})$ isotrope $\quad\Rightarrow\quad f(\boldsymbol{S}) = \bar{f}(S_{\mathrm{I}}, S_{\mathrm{II}}, S_{\mathrm{III}})$

$$= \bar{f}'(\mathrm{tr}(\boldsymbol{S}), \mathrm{tr}(\boldsymbol{S}^2), \mathrm{tr}(\boldsymbol{S}^3))$$
$$= \bar{f}''(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$$

Fonctions à deux arguments :

$f(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})$ isotrope $\quad\Rightarrow\quad f(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) = \bar{f}(\|\boldsymbol{v}\|, \|\boldsymbol{w}\|, \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w})$

$f(\boldsymbol{S},\boldsymbol{v})$ isotrope $\quad\Rightarrow\quad f(\boldsymbol{S},\boldsymbol{v}) = \bar{f}(\|\boldsymbol{v}\|, S_{\mathrm{I}}, S_{\mathrm{II}}, S_{\mathrm{III}}, \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{S}^2\cdot\boldsymbol{v})$

Des résultats plus complets sont donnés dans l'annexe B du pdf.

Tenseur fonction de tenseurs

- $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{Q})$: $\boldsymbol{P} \in \mathbb{V}^{\otimes p}$, $\boldsymbol{Q} \in \mathbb{V}^{\otimes q}$
  - Différentielle : $\mathbf{d}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{P} \overline{\otimes}^q \mathbf{d}\boldsymbol{Q}$
    $\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{P}$ est un tenseur d'ordre $p+q$
  - Composantes de $\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{P}$: (exemple pour $p=2$ et $q=3$)
    $$(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{P})_{ij}{}^{k\ell}{}_m = \frac{\partial \overline{P}_{ij}(Q_{\bullet\bullet}{}^{\bullet})}{\partial Q_{k\ell}{}^m}$$
  - Dérivée temporelle : $\dot{\boldsymbol{P}} = \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{P} \overline{\otimes}^q \dot{\boldsymbol{Q}}$
- $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{Q}_1,\cdots,\boldsymbol{Q}_m,\cdots,\boldsymbol{Q}_r)$: $\boldsymbol{P} \in \mathbb{V}^{\otimes p}$, $\boldsymbol{Q}_m \in \mathbb{V}^{\otimes q_m}$
  - Différentielle : $\mathbf{d}\boldsymbol{P} = \sum_{m=1}^{r} (\boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{Q}_m}\boldsymbol{P}) \overline{\otimes}^{q_m} \mathbf{d}\boldsymbol{Q}_m$
    $\boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{Q}_m}\boldsymbol{P}$ est un tenseur d'ordre $p+q_m$
  - Composantes de $\boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{Q}_m}\boldsymbol{P}$: (exemple pour $p=1$ et $q_m=2$)
    $$(\boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{Q}_m}\boldsymbol{P})^i{}_{jk} = \frac{\partial \overline{P}^i((Q_1)^{\bullet\bullet},\cdots,(Q_r)^{\bullet\bullet})}{\partial (Q_m)^{jk}}$$
  - Dérivée temporelle : $\dot{\boldsymbol{P}} = \sum_{m=1}^{r} (\boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{Q}_m}\boldsymbol{P}) \overline{\otimes}^{q_m} \dot{\boldsymbol{Q}}_m$

Troisième partie

Champs tensoriels

Système de coordonnées

Champ tensoriel : $M \in \mathscr{D} \subset \mathscr{E}_3 \;\rightarrow\; \boldsymbol{T}(M) \in \mathbb{V}_3^{\otimes p}, \quad p \geqslant 0$

Système de coordonnées

On définit une bijection : $M \in \mathscr{E}_3 \;\leftrightarrow\; \{x^1, x^2, x^3\} \in \mathbb{R}^3$

par une fonction $\mathbb{R}^3 \leftrightarrow \mathbb{V}_3$: $\boldsymbol{OM} = \boldsymbol{g}(x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{V}_3$

Exemples :

- coordonnées cartésiennes (x^1, x^2, x^3) : $\boldsymbol{OM} = x^1\,\boldsymbol{i} + x^2\boldsymbol{j} + x^3\,\boldsymbol{k}$
- coordonnées cylindriques (r, θ, z) : $\boldsymbol{OM} = r\,\boldsymbol{u}(\theta) + z\,\boldsymbol{k}$
- coordonnées géographiques (r, θ, φ) : $\boldsymbol{OM} = r\,\boldsymbol{u}(\theta, \varphi)$
- $\ldots$

Notations

Dérivées de $f(x^\bullet)$ par rapport aux coordonnées : $\frac{\partial f}{\partial x^i} = \partial_i f = f_{,i}$

Dans la suite on utilisera la dernière notation : $\frac{\partial f}{\partial x^i} = f_{,i}$

Base naturelle, base physique

Soit un système de coordonnées : $\boldsymbol{OM} = \boldsymbol{g}(x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{V}_3$

Base naturelle d'un système de coordonnées

$$\boldsymbol{e}_i = \frac{\partial \boldsymbol{OM}}{\partial x^i} = \frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial x^i} = \boldsymbol{g}_{,i}$$

La base naturelle $\{\boldsymbol{e}_\bullet\}$ n'est, en général, ni orthogonale ni normée.

Base physique

$$\widetilde{\boldsymbol{e}}_i = \frac{\boldsymbol{e}_i}{\|\boldsymbol{e}_i\|}$$

La base physique $\{\widetilde{\boldsymbol{e}}_\bullet\}$ est normée mais pas orthogonale en général.

Changement de base de $\{\boldsymbol{e}_\bullet\}$ à $\{\widetilde{\boldsymbol{e}}_\bullet\}$:

$$\widetilde{\boldsymbol{e}}_i = A^j{}_i\, \boldsymbol{e}_j \quad \text{avec} \quad [A^\bullet{}_\bullet] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\|\boldsymbol{e}_1\|} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\|\boldsymbol{e}_2\|} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\|\boldsymbol{e}_3\|} \end{bmatrix}$$

On n'utilise la base physique que pour présenter des résultats.

Variations de la base naturelle

La base naturelle en M varie avec les coordonnées de M.

$$\boldsymbol{e}_{i,j} = \Gamma_{ij}^{k}\, \boldsymbol{e}_k$$

Γ_{ij}^{k} est la k^{e} composante contravariante de $\boldsymbol{e}_{i,j}$ sur la base naturelle $\{\boldsymbol{e}_\bullet\}$.

Terminologie :

Les 27 coefficients $\Gamma^{\bullet}_{\bullet\bullet}$ sont appelés coefficients de Christoffel.

Propriétés des $\Gamma^{\bullet}_{\bullet\bullet}$: (démonstrations dans le pdf)

- symétrie sur les indices inférieurs :

  $$\Gamma_{ij}^{k} = \Gamma_{ji}^{k} \qquad \left(\boldsymbol{e}_{i,j} = \boldsymbol{g}_{,ij} = \boldsymbol{g}_{,ji} = \boldsymbol{e}_{j,i} \quad \text{il en reste 18 distincts}\right)$$

- expression en fonction du tenseur métrique :

  $$\Gamma_{ij}^{k} = \frac{1}{2}\, g^{km} \left(g_{jm,i} + g_{im,j} - g_{ij,m}\right) \qquad \text{(comp. de } \boldsymbol{G} \text{ sur la base naturelle)}$$

Variations de la base duale : $\boldsymbol{e}^{k}{}_{,i} = -\Gamma_{ij}^{k}\, \boldsymbol{e}^{j}$

Les $\Gamma^{\bullet}_{\bullet\bullet}$ ne sont pas les composantes d'un tenseur !

Remarque : en coordonnées cartésiennes les $\Gamma^{\bullet}_{\bullet\bullet}$ sont tous nuls.

Gradient d'un champ tensoriel

Soit un champ tensoriel : $M \in \mathscr{E}_3 \to \boldsymbol{T}(M) \in \mathbb{V}_3^{\otimes p}$
Système de coordonnées : $\boldsymbol{OM} \in \mathbb{V}_3 \to \boldsymbol{T}(\boldsymbol{OM}) \in \mathbb{V}_3^{\otimes p}$

Gradient

Le champ $\boldsymbol{T}(M)$ est différentiable si $\exists\, \mathbf{grad}\,\boldsymbol{T}$ tel que :

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{OM}+\mathbf{d}\boldsymbol{M})-\boldsymbol{T}(\boldsymbol{OM}) = \mathbf{grad}\,\boldsymbol{T}\cdot\mathbf{d}\boldsymbol{M}+\|\mathbf{d}\boldsymbol{M}\|\,\mathscr{O}(\mathbf{d}\boldsymbol{M}), \quad \forall\,\mathbf{d}\boldsymbol{M}$$

$\mathbf{grad}\,\boldsymbol{T}$ est un tenseur d'ordre $p+1$

Différentielle du champ $\boldsymbol{T}(M)$:

$$\mathbf{d}\boldsymbol{T} = \mathbf{grad}\,\boldsymbol{T}\cdot\mathbf{d}\boldsymbol{M}, \quad \forall\,\mathbf{d}\boldsymbol{M}$$

(pas nécessairement « petit »)

Dérivée de $\boldsymbol{T}(M)$ dans une direction unitaire $\boldsymbol{u}_0$:

$$\boldsymbol{T}'_{\boldsymbol{u}_0} = \lim_{\mathbf{d}\boldsymbol{M}\to 0,\ \frac{\mathbf{d}\boldsymbol{M}}{\|\mathbf{d}\boldsymbol{M}\|}\to\boldsymbol{u}_0} \frac{\boldsymbol{T}(\boldsymbol{OM}+\mathbf{d}\boldsymbol{M})-\boldsymbol{T}(\boldsymbol{OM})}{\|\mathbf{d}\boldsymbol{M}\|} = \mathbf{grad}\,\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{u}_0$$

Quelles sont les composantes de $\mathbf{grad}\,\boldsymbol{T}$ dans la base naturelle du système de coordonnées ?

Composantes du gradient d'un champ tensoriel

Exemple : $\boldsymbol{T}(M) = T^i{}_j(x^\bullet)\,\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}^j$ (composantes mixtes dans la base naturelle)

$$\begin{aligned}
\mathbf{d}\boldsymbol{T} &= \mathrm{d}T^i{}_j\,\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}^j + T^i{}_j\,\mathbf{d}\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}^j + T^i{}_j\,\boldsymbol{e}_i \otimes \mathbf{d}\boldsymbol{e}^j, \quad \forall\,\mathbf{d}\boldsymbol{M}\\
\mathbf{grad}\,\boldsymbol{T}\cdot\mathbf{d}\boldsymbol{M} &= T^i{}_{j,k}\,\mathrm{d}x^k\,\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}^j + T^i{}_j\,\boldsymbol{e}_{i,k}\,\mathrm{d}x^k \otimes \boldsymbol{e}^j + T^i{}_j\,\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}^j{}_{,k}\,\mathrm{d}x^k\\
&= T^i{}_{j,k}\,\mathrm{d}x^k\,\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}^j + T^i{}_j\,\Gamma^m_{ik}\,\boldsymbol{e}_m\,\mathrm{d}x^k \otimes \boldsymbol{e}^j - T^i{}_j\,\boldsymbol{e}_i \otimes \Gamma^j_{km}\,\boldsymbol{e}^m\,\mathrm{d}x^k\\
&= T^i{}_{j,k}\,\mathrm{d}x^k\,\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}^j + T^m{}_j\,\Gamma^i_{mk}\,\boldsymbol{e}_i\,\mathrm{d}x^k \otimes \boldsymbol{e}^j - T^i{}_m\,\boldsymbol{e}_i \otimes \Gamma^m_{jk}\,\boldsymbol{e}^j\,\mathrm{d}x^k\\
&= (T^i{}_{j,k} + T^m{}_j\,\Gamma^i_{mk} - T^i{}_m\,\Gamma^m_{jk})\,\mathrm{d}x^k\,\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}^j\\
(\mathbf{grad}\,\boldsymbol{T})^i{}_{jk}\,\mathrm{d}x^k &= (T^i{}_{j,k} + T^m{}_j\,\Gamma^i_{mk} - T^i{}_m\,\Gamma^m_{jk})\,\mathrm{d}x^k, \quad \forall\,\mathrm{d}x^k
\end{aligned}$$

Résultat : $(\mathbf{grad}\,\boldsymbol{T})^i{}_{jk} = T^i{}_{j,k} + T^m{}_j\,\Gamma^i_{mk} - T^i{}_m\,\Gamma^m_{jk}$

Règle pour les p termes complémentaires

On somme les indices contravariants de $\boldsymbol{T}$ avec $+\Gamma^\bullet_{\bullet\bullet}$,
on somme les indices covariants avec $-\Gamma^\bullet_{\bullet\bullet}$,
en respectant les conventions d'Einstein.

Rappel : en coordonnées cartésiennes les $\Gamma^\bullet_{\bullet\bullet}$ sont tous nuls.

Résumé sur le gradient d'un champ tensoriel

- Définition tensorielle de $\mathbf{grad}\,\boldsymbol{T}$: $\quad \mathbf{d}\boldsymbol{T} = \mathbf{grad}\,\boldsymbol{T} \cdot \mathbf{d}\boldsymbol{M}$
- Si $\boldsymbol{T}$ est d'ordre p, $\mathbf{grad}\,\boldsymbol{T}$ est d'ordre $p+1$
- Composantes de $\mathbf{grad}\,\boldsymbol{T}$ sur la base naturelle : ($\boldsymbol{T}$ d'ordre 3)

$$(\mathbf{grad}\,\boldsymbol{T})^{ij}{}_{k\ell} = T^{ij}{}_{k,\ell} + T^{mj}{}_{k}\,\Gamma^{i}_{m\ell} + T^{im}{}_{k}\,\Gamma^{j}_{m\ell} - T^{ij}{}_{m}\,\Gamma^{m}_{k\ell}$$

(le dernier indice de $\mathbf{grad}\,\boldsymbol{T}$ est l'indice de dérivation)

Exemples :

- Le gradient d'un champ scalaire est un vecteur :

$$(\mathbf{grad}\,f)_{\ell} = f_{,\ell}$$ (composantes covariantes sur la base naturelle)

- Le gradient d'un champ vectoriel est d'ordre 2 :

$$(\mathbf{grad}\,\boldsymbol{v})^{i}{}_{\ell} = v^{i}{}_{,\ell} + v^{m}\,\Gamma^{i}_{m\ell}$$
$$(\mathbf{grad}\,\boldsymbol{v})_{i\ell} = v_{i,\ell} - v_{m}\,\Gamma^{m}_{i\ell}$$

(en coordonnées cartésiennes, la matrice $[v^{\bullet}{}_{,\bullet}]$ est appelée matrice jacobienne)

Autres notations : (rencontrées dans la littérature)

$$\mathbf{grad}\,\boldsymbol{T} = \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{T} \qquad (\mathbf{grad}\,\boldsymbol{T})^{ij}{}_{k\ell} = T^{ij}{}_{k;\ell} \qquad T^{ij}{}_{k,\ell} = \partial_{\ell} T^{ij}{}_{k}$$

Divergence d'un champ tensoriel

Divergence d'un champ d'ordre $p \geqslant 1$

$$\mathbf{div}\,\boldsymbol{T} = \mathbf{grad}\,\boldsymbol{T} : \boldsymbol{G}$$

Si $\boldsymbol{T}$ est d'ordre p, $\mathbf{div}\,\boldsymbol{T}$ est d'ordre $p-1$.

Composantes dans la base naturelle :

- La divergence d'un champ vectoriel est un scalaire :
$$\begin{aligned}\operatorname{div}\boldsymbol{v} = \mathbf{grad}\,\boldsymbol{v} : \boldsymbol{G} &= \left(v^i{}_{,\ell} + v^m\,\Gamma^i_{m\ell}\right)\,\delta^\ell_i = v^\ell{}_{,\ell} + v^m\,\Gamma^\ell_{m\ell} \\ &= \left(v_{i,\ell} - v_m\,\Gamma^m_{i\ell}\right) g^{i\ell}\end{aligned}$$
(en coordonnées cartésiennes, $\Gamma^{\bullet}_{\bullet\bullet} = 0 \Rightarrow \operatorname{div}\boldsymbol{v} = v^\ell{}_{,\ell} = v^1{}_{,1} + v^2{}_{,2} + v^3{}_{,3}$)
- La divergence d'un champ d'ordre 2 est un vecteur :
$$\begin{aligned}(\mathbf{div}\,\boldsymbol{T})^i &= \left(T^{ij}{}_{,\ell} + T^{mj}\,\Gamma^i_{m\ell} + T^{im}\,\Gamma^j_{m\ell}\right)\delta^\ell_j \\ &= T^{i\ell}{}_{,\ell} + T^{m\ell}\,\Gamma^i_{m\ell} + T^{im}\,\Gamma^\ell_{m\ell}\end{aligned}$$

Rotationnel d'un champ d'ordre $p \geqslant 1$

$$\mathbf{rot}\,\boldsymbol{T} = -\,\mathbf{grad}\,\boldsymbol{T} : \boldsymbol{H}$$

Si $\boldsymbol{T}$ est d'ordre p, $\mathbf{rot}\,\boldsymbol{T}$ est d'ordre p.

Composantes dans la base naturelle :

- Le rotationnel d'un champ vectoriel est vectoriel :
  $$(\mathbf{rot}\,\boldsymbol{v})^k = -\left(v_{i,j} - v_m\,\Gamma^m_{ij}\right) h^{ijk} = -v_{i,j}\,h^{ijk}$$
  $$\begin{aligned}\mathbf{rot}\,\boldsymbol{v} &= (v_{3,2} - v_{2,3})\,h^{231}\,\boldsymbol{e}_1 + (v_{1,3} - v_{3,1})\,h^{312}\,\boldsymbol{e}_2 + (v_{2,1} - v_{1,2})\,h^{123}\,\boldsymbol{e}_3 \\ &= \frac{1}{\sqrt{g}}\left((v_{3,2} - v_{2,3})\,\boldsymbol{e}_1 + (v_{1,3} - v_{3,1})\,\boldsymbol{e}_2 + (v_{2,1} - v_{1,2})\,\boldsymbol{e}_3\right)\end{aligned}$$
- Le rotationnel d'un champ d'ordre 2 est d'ordre 2 :
  $$\begin{aligned}(\mathbf{rot}\,\boldsymbol{T})^{ij} &= (\mathbf{grad}\,\boldsymbol{T})^i{}_{pq}\,h^{qpj} \\ &= \left(T^i{}_{p,q} + T^m{}_p\,\Gamma^i_{mq} - T^i{}_m\,\Gamma^m_{pq}\right) h^{qpj} \\ &= \left(T^i{}_{p,q} + T^m{}_p\,\Gamma^i_{mq}\right) h^{qpj}\end{aligned}$$

Laplacien d'un champ tensoriel

Laplacien d'un champ d'ordre $p \geqslant 0$

$$\boldsymbol{\Delta T} = \mathrm{div}\,\mathbf{grad}\,\boldsymbol{T}$$

Si $\boldsymbol{T}$ est d'ordre p, $\boldsymbol{\Delta T}$ est d'ordre p.

Composantes dans la base naturelle :

- Le laplacien d'un champ scalaire est un champ scalaire :
$$\Delta f = \mathrm{div}\,\mathbf{grad} f = \mathbf{grad}(\mathbf{grad} f) : \boldsymbol{G} = \left((f_{,i})_{,j} - f_{,m}\,\Gamma^m_{ij}\right) g^{ij}$$
$$= f_{,ij}\,g^{ij} - f_{,m}\,\Gamma^m_{ij}\,g^{ij}$$
- Le laplacien d'un champ vectoriel est un champ vectoriel :
$$\boldsymbol{\Delta v} = \mathbf{grad}(\mathbf{grad}\,\boldsymbol{v}) : \boldsymbol{G}$$
$$(\boldsymbol{\Delta v})^i = \left((\mathbf{grad}\,\boldsymbol{v})^i{}_{p,q} + (\mathbf{grad}\,\boldsymbol{v})^m{}_p\,\Gamma^i_{mq} + (\mathbf{grad}\,\boldsymbol{v})^i{}_m\,\Gamma^m_{pq}\right) g^{pq}$$
$(\boldsymbol{\Delta v})^i = \cdots$ (long à écrire car $(\mathbf{grad}\,\boldsymbol{v})^i{}_{p,q}$ contient des dérivées de $\Gamma^{\bullet}_{\bullet\bullet}$)

En coordonnées cartésiennes ($\Gamma^{\bullet}_{\bullet\bullet}=0$) orthonormées ($[g^{\bullet\bullet}] = [I]$) :
$$(\boldsymbol{\Delta v})^i = (\mathbf{grad}\,\boldsymbol{v})^i{}_{p,q}\,g^{pq} = v^i{}_{,pq}\,g^{pq} = \sum_{p=1}^n v^i{}_{,pp}$$

Formulaires classiques

- Chaque système de coordonnées est caractérisé par :
  - sa base naturelle,
  - sa base physique,
  - ses 18 coefficients de Christoffel $\{\Gamma^{\bullet}_{\bullet\bullet}\}$.
- Les expressions des composantes dans la base naturelle des opérateurs différentiels **grad**, **div**, **rot** et $\boldsymbol{\Delta}$ sont les mêmes pour tous les systèmes de coordonnées.
- Les formulaires classiques supposent des composantes données dans la base physique. Ils sont donc spécifiques à chaque système de coordonnées.

Avis aux praticiens du calcul formel :

Package `Tens3D`, pour Maple® et Mathematica®, pour pratiquer l'algèbre et l'analyse dans toute base et tout système de coordonnées.
`http://jean.garrigues.perso.centrale-marseille.fr/tens3d.html`

Champs tensoriels particuliers

Champ tensoriel conservatif

$\boldsymbol{T}(M)$ est conservatif dans $\mathscr{D}$ si $\quad \mathbf{div}\boldsymbol{T} = \mathbf{0}, \quad \forall M \in \mathscr{D}$

Propriété :

$\boldsymbol{T}(M) \in \mathbb{V}^{\otimes p}$ conservatif $\Rightarrow \exists \boldsymbol{\Psi}(M) \in \mathbb{V}^{\otimes p}$ tel que $\boldsymbol{T} = \mathbf{rot}\boldsymbol{\Psi}$

(si $p = 1$, $\boldsymbol{\Psi}$ est appelé potentiel vecteur du champ conservatif)

Champ tensoriel irrotationnel

$\boldsymbol{T}(M)$ est irrotationnel dans $\mathscr{D}$ si $\quad \mathbf{rot}\boldsymbol{T} = \mathbf{0}, \quad \forall M \in \mathscr{D}$

Propriété :

$\boldsymbol{T}(M) \in \mathbb{V}^{\otimes p}$ irrotationnel $\Rightarrow \exists \boldsymbol{\Phi}(M) \in \mathbb{V}^{\otimes p-1}$ t.q. $\boldsymbol{T} = \mathbf{grad}\,\boldsymbol{\Phi}$

(si $p = 1$, $\boldsymbol{\Phi}$ est appelé potentiel scalaire du champ irrotationnel)

Théorèmes importants

- Soit $\mathscr{D}$ un domaine volumique fermé, connexe par arcs, de frontière(s) $\partial\mathscr{D}$, $\boldsymbol{n}$ est la normale unitaire extérieure à $\partial\mathscr{D}$.

Théorème de la divergence (Ostrogradski)

$$\forall \boldsymbol{T}(M) \in \mathbb{V}^{\otimes p}, \quad \int_{\mathscr{D}} \mathbf{div}\boldsymbol{T}\,\mathrm{d}v = \int_{\partial\mathscr{D}} \boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}s$$

« L'intégrale de $\mathbf{div}\boldsymbol{T}$ sur $\mathscr{D}$ est égale au flux de $\boldsymbol{T}$ à travers la frontière. »

- Soit $\mathscr{S}$ un domaine surfacique fermé, connexe par arcs, de normale unitaire $\boldsymbol{n}$, de frontière(s) $\mathscr{C}$, $\boldsymbol{t}$ est la tangente unitaire à $\mathscr{C}$.

Théorème de Stokes

$$\forall \boldsymbol{T}(M) \in \mathbb{V}^{\otimes p}, \quad \int_{\mathscr{S}} (\mathbf{rot}\boldsymbol{T})\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}s = \int_{\mathscr{C}} \boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{t}\,\mathrm{d}\ell$$

« Le flux de $\mathbf{rot}\boldsymbol{T}$ à travers $\mathscr{S}$ est égal à la circulation de $\boldsymbol{T}$ le long du contour. »

Quelques identités utiles

f champ scalaire ; $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ champs vectoriels ; $\boldsymbol{T}$ champ tensoriel d'ordre 2.

$\mathbf{grad}\,\boldsymbol{OM} = \boldsymbol{G} \qquad \mathbf{grad}\,\boldsymbol{G} = \mathbf{0} \qquad \mathbf{grad}\,\boldsymbol{H} = \mathbf{0}$

$\operatorname{div}\mathbf{rot}\,\boldsymbol{v} = 0$

$\mathbf{rot}\,\mathbf{grad}\,f = \mathbf{0} \qquad \mathbf{rot}\,\mathbf{grad}\,\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$

$\mathbf{grad}(f\,\boldsymbol{v}) = f\,\mathbf{grad}\,\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v} \otimes \mathbf{grad}\,f$

$\operatorname{div}(f\,\boldsymbol{v}) = f\,\operatorname{div}\boldsymbol{v} + \mathbf{grad}\,f \cdot \boldsymbol{v}$

$\mathbf{rot}(f\,\boldsymbol{v}) = f\,\mathbf{rot}\,\boldsymbol{v} + \mathbf{grad}\,f \wedge \boldsymbol{v}$

$\operatorname{div}(\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{w}) = \boldsymbol{w} \cdot \mathbf{rot}\,\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v} \cdot \mathbf{rot}\,\boldsymbol{w}$

$\boldsymbol{\Delta}\,\boldsymbol{v} = \mathbf{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{v} - \mathbf{rot}\,\mathbf{rot}\,\boldsymbol{v} \qquad \boldsymbol{\Delta}\,\boldsymbol{T} = \mathbf{grad}\,\mathbf{div}\,\boldsymbol{T} - \mathbf{rot}\,\mathbf{rot}\,\boldsymbol{T}$

$\mathbf{div}(\boldsymbol{T} \otimes \boldsymbol{v}) = \mathbf{grad}\,\boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{v} + \boldsymbol{T}\operatorname{div}\boldsymbol{v}$

$\mathbf{div}(\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{T}) = \boldsymbol{v} \otimes \mathbf{div}\,\boldsymbol{T} + \mathbf{grad}\,\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{T}^\top$

$\operatorname{div}(\boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v} \cdot \mathbf{div}(\boldsymbol{T}^\top) + \boldsymbol{T}^\top : \mathbf{grad}\,\boldsymbol{v}$

$\operatorname{div}(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{T}) = \boldsymbol{v} \cdot \mathbf{div}\,\boldsymbol{T} + \boldsymbol{T} : \mathbf{grad}\,\boldsymbol{v}$

$\cdots$ (voir les fichiers démo de `Tens3D`)

Deux applications importantes :

Dérivée temporelle d'intégrales à bord variable :

$$\frac{\mathbf{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathscr{D}(t)} \boldsymbol{T}(M,t)\,\mathrm{d}v = \int_{\mathscr{D}(t)} \frac{\partial \boldsymbol{T}(M,t)}{\partial t}\,\mathrm{d}v + \int_{\partial\mathscr{D}(t)} \boldsymbol{T}(N,t)\left(\boldsymbol{v}^f(N,t)\cdot\boldsymbol{n}\right)\mathrm{d}s$$

où : $\boldsymbol{T}(M,t) \in \mathbb{V}^{\otimes p}$, $\quad M \in \mathscr{D}(t)$, $\quad N \in \partial\mathscr{D}(t)$,

$\boldsymbol{v}^f(N,t)$: vitesse des points de la frontière variable.

Équations de compatibilité :

$\exists \boldsymbol{v}(M)$ solution de $\boldsymbol{S} = \mathbf{sym}\,\mathbf{grad}\,\boldsymbol{v}$ si et seulement si $\quad \mathbf{rot}\,\mathbf{rot}^\top \boldsymbol{S} = \mathbf{0}$

Forme équivalente :

$$\mathbf{grad}\,\mathbf{div}\,\boldsymbol{S} + \mathbf{grad}^\top\,\mathbf{div}\,\boldsymbol{S} - \mathbf{grad}\,\mathbf{grad}\,\mathrm{tr}\,\boldsymbol{S} - \boldsymbol{\Delta}\,\boldsymbol{S} = \mathbf{0}$$

Et maintenant, une annonce...

Le prochain épisode s'intitule :

Cinématique des milieux continus

Au programme :

- Observateurs et changements d'observateurs ;
- Universalité des définitions et des lois ;
- Objectivité ou non des grandeurs physiques ;
- Description des champs en MMC ;
- Déformation (ni petite, ni grande : normale !) ;
- Vitesse de déformation.

Merci de votre attention.