laboratoire de mécanique et d'acoustique

Comportements inélastiques

(solides déformables monoconstituants)

Jean Garrigues

mailto:jean.garrigues@centrale-marseille.fr

http://jean.garrigues.perso.centrale-marseille.fr/

Lundi 18 et mercredi 20 juin 2018

CENTRALE
MARSEILLE

Au programme…

Première partie

Définition de l'inélasticité

(solides déformables monoconstituants)

Variables d'état d'une particule

Variables d'état en inélasticité (solide monoconstituant) :

1. La température T. (imposée par la thermodynamique)
2. Des variables d'état cinématiques :
   - la déformation actuelle $\boldsymbol{X}$ (ordre 2, symétrique, objectif) ;
   - d'éventuelles directions actuelles d'anisotropie $\boldsymbol{N}_t^{\bullet}$.

     Rappel : $\boldsymbol{N}_t^{\bullet} = \boldsymbol{n}_t^{\bullet} \otimes \boldsymbol{n}_t^{\bullet}$. (tenseur d'ordre 2 uniaxial unitaire)
3. Absence de variable d'état de concentration. (monoconstituant)

   Dans les évolutions, il n'y ni changement de phase ni réaction chimique (endothermique ou exothermique).

   La seule source de dissipation intrinsèque est le frottement : $\Phi_{int} \geqslant 0$.
4. D'éventuelles variables d'état mnésiques actuelles $\boldsymbol{\alpha}_t^{\bullet}$.

   (résumé utile du chemin suivi pour aboutir à l'état actuel)

Conséquence du théorème des fonctions isotropes :

Les variables d'état cinématiques retenues pour le modèle se réduisent à une liste de variables d'état scalaires indépendantes : $\{I_1, \cdots, I_m\}$.

(construites avec des invariants de $\boldsymbol{X}$ et des invariants croisés entre $\boldsymbol{X}$ et $\boldsymbol{N}_t^{\bullet}$)

Dérivée particulaire des variables d'état cinématiques

Rappel :

Les dérivées particulaires des variables d'état cinématiques scalaires $\{I_1, \cdots, I_m\}$ s'écrivent toutes sous la forme :

$\dot{I}_j = \boldsymbol{S}_j : \boldsymbol{D}$ ($\boldsymbol{S}_j$ d'ordre 2, symétrique, particulier à chaque variable d'état I_j)

Exemples :

(voir les cours de cinématique et d'élasticité)

$$\dot{B}_{\mathrm{I}} = 2\boldsymbol{B} : \boldsymbol{D} \qquad \dot{B}_{\mathrm{II}} = 2\,(B_{\mathrm{I}}\boldsymbol{B} - \boldsymbol{B}^2) : \boldsymbol{D} \qquad \dot{B}_{\mathrm{III}} = 2\,B_{\mathrm{III}}\,\boldsymbol{G} : \boldsymbol{D}$$

$$(\boldsymbol{B} : \boldsymbol{N}_t)^{\cdot} = \big(4\,\mathbf{sym}(\boldsymbol{N}_t \cdot \boldsymbol{B}) - 2\,(\boldsymbol{B} : \boldsymbol{N}_t)\boldsymbol{N}_t\big) : \boldsymbol{D}$$

$$(\boldsymbol{B}^2 : \boldsymbol{N}_t)^{\cdot} = \big(4\,\mathbf{sym}(\boldsymbol{N}_t \cdot \boldsymbol{B}^2) - 2\,(\boldsymbol{B}^2 : \boldsymbol{N}_t)\boldsymbol{N}_t + 2\,(\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{N}_t \cdot \boldsymbol{B})\big) : \boldsymbol{D}$$

$$\dot{K}_v = K_v\,\boldsymbol{G} : \boldsymbol{D} \qquad \dot{\delta} = \Big(\frac{\delta^{1/3}}{{K_v}^{2/3}}\boldsymbol{B} - \delta\,\boldsymbol{G}\Big) : \boldsymbol{D}$$

(rappel : δ abréviation de δ^s_{max})

$$\dot{a} = \Big(\frac{\boldsymbol{B}:\boldsymbol{N}_t}{{K_v}^{2/3}}\Big)^{\cdot} = \Big(-\frac{2a}{3}\boldsymbol{G} + \frac{4}{{K_v}^{2/3}}\,\mathbf{sym}(\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{N}_t) - 2\,a\boldsymbol{N}_t\Big) : \boldsymbol{D}$$

$\cdots$ (exercices : autres tenseurs de déformation ou autres invariants cinématiques)

Les tenseurs symétriques $\boldsymbol{S}_j$ sont des fonctions de la déformation et des éventuelles directions d'anisotropie.

Rappels d'élasticité (élasticité générique)

Conditions nécessaires et suffisantes de l'élasticité :

1. Absence de variable d'état mnésique. (seulement $\{T, I_1, \cdots, I_m\}$)
2. Dans toute évolution $\Phi_{int} = 0$. (pas de frottement, mais $\Phi_{th} \geqslant 0$)
3. Le tenseur des contraintes est une fonction d'état.

$$\begin{aligned}
\forall \dot{T}\, \forall \boldsymbol{D}, \quad 0 &= -\rho\,(\dot{\psi}^m + s^m\,\dot{T}) + \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{D} \qquad \text{(dissipation intrinsèque nulle)} \\
&= -\rho\,(\partial_T \bar{f}_\psi\,\dot{T} + \textstyle\sum_{j=1}^m \partial_{I_j} \bar{f}_\psi\, \dot{I}_j + \bar{f}_s\,\dot{T}) + \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{D} \\
&= -\rho\,(\partial_T \bar{f}_\psi\,\dot{T} + \textstyle\sum_{j=1}^m \partial_{I_j} \bar{f}_\psi\, \boldsymbol{S}_j : \boldsymbol{D} + \bar{f}_s\,\dot{T}) + \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{D} \\
&= -\rho\,(\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s)\,\dot{T} + \big(-\rho\,\textstyle\sum_{j=1}^m \partial_{I_j} \bar{f}_\psi\, \boldsymbol{S}_j + \boldsymbol{\sigma}\big) : \boldsymbol{D}
\end{aligned}$$

$$\forall \dot{T},\ \Phi_{int} = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s = 0 \qquad \text{(relation de Helmholtz)}$$

$$\forall \boldsymbol{D},\ \Phi_{int} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\sigma} = \rho\,\textstyle\sum_{j=1}^m \partial_{I_j} \bar{f}_\psi\, \boldsymbol{S}_j \qquad \text{(comport. mécanique élastique)}$$

> Cette forme générique du comportement mécanique élastique est valable quel que soit le nombre d'anisotropies.

La fonction d'état tensorielle $\rho\,\sum_{j=1}^m \partial_{I_j} \bar{f}_\psi\, \boldsymbol{S}_j$ va réapparaître en inélasticité.

Inélasticité (solides monoconstituants)

Définition

Un modèle de comportement est inélastique s'il viole au moins une des conditions de l'élasticité.

Dans les modèles de comportement inélastiques :

- soit il y a au moins une variable d'état mnésique,
- soit la dissipation intrinsèque n'est pas nulle,
- soit le tenseur des contraintes n'est pas une fonction d'état,
- soit plusieurs de ces éventualités.

On peut donc contruire une grande diversité de modèles de comportement inélastiques.

Plan pour la suite :

On envisagera des modèles de complexité croissante en augmentant le nombre de variables mnésiques, à partir de 0.

Seconde partie

Inélasticité sans variable mnésique

Variables d'état et fonctions d'état

Variables d'état :

1. La température T. (thermodynamique)
2. Un tenseur de déformation objectif $\boldsymbol{X}$. (solide déformable)
3. D'éventuelles directions d'anisotropie $\boldsymbol{N}_t^\bullet$.

Fonctions d'état :

- Énergie interne massique : (1er principe de la thermodynamique)
  $$e^m = f_e(T,\boldsymbol{X},\boldsymbol{N}_t^\bullet) = \bar{f}_e(T,I_1,\cdots,I_m)$$
- Entropie massique : (2ème principe de la thermodynamique)
  $$s^m = f_s(T,\boldsymbol{X},\boldsymbol{N}_t^\bullet) = \bar{f}_s(T,I_1,\cdots,I_m)$$
- Énergie libre massique de Helmholtz : (fonction d'état auxilliaire)
  $$\psi^m = e^m - T\,s^m = f_\psi(T,\boldsymbol{X},\boldsymbol{N}_t^\bullet) = \bar{f}_\psi(T,I_1,\cdots,I_m)$$

Rappel : pour les variables d'état cinématiques : $\dot{I}_j = \boldsymbol{S}_j : \boldsymbol{D}$

Comportement mécanique

Dissipation intrinsèque :

$\forall \dot{T}\ \forall \boldsymbol{D},\quad \Phi_{int} = -\rho\left(\dot{\psi}^m + s^m\,\dot{T}\right) + \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{D} \geqslant 0$ (2^{e} principe, Clausius-Duhem)

$\dots$ $\left(\psi^m = \bar{f}_\psi(T, I_1, \cdots, I_m)\right)$, mêmes variables d'état qu'en élasticité)

$$\Phi_{int} = -\rho\left(\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s\right)\dot{T} + \left(-\rho \textstyle\sum_{j=1}^m \partial_{I_j}\bar{f}_\psi \boldsymbol{S}_j + \boldsymbol{\sigma}\right) : \boldsymbol{D} \geqslant 0$$

$\forall \dot{T},\ \Phi_{int} \geqslant 0$ et $\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s$ fonction d'état $\quad\Rightarrow\quad \partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s = 0$

(relation de Helmholtz, il suffit donc d'une seule fonction d'état pour définir le modèle)

$\forall \boldsymbol{D},\ \Phi_{int} \geqslant 0 \quad\Rightarrow\quad \exists \boldsymbol{f}$ tel que $\boldsymbol{\sigma} - \rho \sum_{j=1}^m \partial_{I_j}\bar{f}_\psi \boldsymbol{S}_j = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{D}, \cdots)$

Contrainte de référence (dite aussi contrainte « élastique »)

On pose : $\boldsymbol{\sigma}_{ref} = \rho \sum_{j=1}^m \partial_{I_j}\bar{f}_\psi \boldsymbol{S}_j$ ($\boldsymbol{\sigma}_{ref}$ est une fonction d'état)

Comportement mécanique

$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_{ref} + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{D}, \cdots)$ ($\boldsymbol{\sigma}$ n'est pas une fonction d'état)

Contrainte dissipative

$\boldsymbol{\sigma}_d = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{D}, \cdots)$ doit être choisie telle que $\forall \boldsymbol{D},\quad \boldsymbol{f}(\boldsymbol{D}, \cdots) : \boldsymbol{D} \geqslant 0$

Synthèse

Construction d'un modèle inélastique sans variable mnésique :

1. Le choix des variables d'état cinématiques scalaires $\{I_1, \cdots, I_m\}$ indépendantes se fait comme en élasticité (isotrope ou non).
2. La construction de la fonction d'état $\bar{f}_\psi$ se fait comme en élasticité (isotrope ou non).
   (chemin dans l'espace des états, mesures à $\dot{T} = 0$, $\mathbf{grad}\, T = \mathbf{0}$ et $\boldsymbol{D} = \mathbf{0}$, évent. idéalisées)
   On obtient : $\boldsymbol{\sigma}_{ref} = \rho \sum_{j=1}^{m} \partial_{I_j} \bar{f}_\psi \boldsymbol{S}_j$. (rappel : $\rho = \frac{\rho_0}{K_v}$)
3. L'identification de la contrainte dissipative $\boldsymbol{\sigma}_d = \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_{ref}$ se fait avec des mesures de contraintes à vitesse d'évolution contrôlée. (ou bien $\boldsymbol{\sigma}_d = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{D}, \cdots)$ idéalisée)

Terminologie :

Si $\boldsymbol{\sigma}_d = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{D}, T)$ le modèle est dit *viscoélastique*.

Un exemple d'idéalisation possible est :

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{D}, T) = \mu(T)\boldsymbol{D} \quad \text{où } \forall T,\ \mu(T) > 0 \qquad (\Phi_{int} = \mu(T)\boldsymbol{D} : \boldsymbol{D} = \mu(T)\,\|\boldsymbol{D}\|^2 \geqslant 0)$$

Troisième partie

Inélasticité à une variable mnésique

Variables et fonctions d'état

Variables d'état :

1. La température T. (thermodynamique)
2. Un tenseur de déformation objectif $\boldsymbol{X}$. (solide déformable)
3. D'éventuelles directions d'anisotropie $\{\boldsymbol{N}_t^\bullet\}$.
4. Une variable d'état mnésique scalaire α.

Fonctions d'état :

- Énergie interne massique : (1er principe de la thermodynamique)
  $$e^m = f_e(T,\boldsymbol{X},\{\boldsymbol{N}_t^\bullet\},\alpha) = \bar{f}_e(T,I_1,\cdots,I_m,\alpha)$$
- Entropie massique : (2ème principe de la thermodynamique)
  $$s^m = f_s(T,\boldsymbol{X},\{\boldsymbol{N}_t^\bullet\},\alpha) = \bar{f}_s(T,I_1,\cdots,I_m,\alpha)$$
- Énergie libre massique de Helmholtz : (fonction d'état auxilliaire)
  $$\psi^m = e^m - T\,s^m = f_\psi(T,\boldsymbol{X},\{\boldsymbol{N}_t^\bullet\},\alpha) = \bar{f}_\psi(T,I_1,\cdots,I_m,\alpha)$$

Dissipation intrinsèque

Dissipation intrinsèque :

$$\forall \dot{T}\, \forall \boldsymbol{D}, \quad -\rho\,(\dot{\psi}^m + s^m\,\dot{T}) + \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{D} \geqslant 0$$ ($\Phi_{int} \geqslant 0,$ Clausius-Duhem)

$\dots$ (on utilise $\psi^m = \bar{f}_\psi(T, I_1, \cdots, I_m, \alpha)$ et $\dot{I}_j = \boldsymbol{S}_j : \boldsymbol{D}$)

$$\forall \dot{T}\, \forall \boldsymbol{D}, \quad -\rho\,(\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s)\,\dot{T} + \Big(-\rho\,\textstyle\sum_{j=1}^m \partial_{I_j} \bar{f}_\psi\, \boldsymbol{S}_j + \boldsymbol{\sigma}\Big) : \boldsymbol{D} - \rho\,\partial_\alpha \bar{f}_\psi\, \dot{\alpha} \geqslant 0$$

Remarque importante :

La variable mnésique α n'ayant pas encore de signification physique, sa dérivée particulaire $\dot{\alpha}$ lors d'une évolution n'est pas définie.

On ne pourra exploiter la non négativité de la dissipation intrinsèque dans toute évolution que lorsque l'on aura attribué un sens physique à la variable d'état mnésique α !

C'est ce qui sera fait dans les modèles de comportement qui suivent.

Quatrième partie

Un modèle de plasticité

Motivations

Les solides élastiques ont une limite élastique pour se protéger :

- des réarrangements de liaisons interatomiques (plastification)
- ou des ruptures de liaisons interatomiques (endommagement)

On souhaite construire un modèle du comportement au delà d'une limite élastique par plastification. (on suppose qu'il n'y a pas d'endommagement)

Choix d'un critère (macroscopique) de limite élastique

La distorsion stérique maximale en une particule P est soumise à une limite : $\forall P \, \forall t, \quad \delta^s_{max}(P,t) \leq \delta_{lim}$

(si $\delta^s_{max}(P,t) > \delta_{lim}$, des réarrangements de liaisons se produisent en la particule P)

Remarques :

- Contrairement à des habitudes courantes, le seuil de délenchement de la plastification porte ici sur la déformation et non sur les contraintes.
- Pour les adeptes de la « loi » de Hooke, un critère traditionnel est :

$$\sigma_{VM} = \sqrt{3/2}\,\|\mathbf{dev}\,\boldsymbol{\sigma}\| \leq \sigma_{lim} \quad \Leftrightarrow \quad \|\mathbf{dev}\,\boldsymbol{\varepsilon}\| \leq \frac{\sigma_{lim}}{2\mu\sqrt{3/2}}.$$

(mais l'interprétation cinématique de $\|\mathbf{dev}\,\boldsymbol{\varepsilon}\|$ est obscure !)

Hypothèse simplificatrice

Hypothèse simplificatrice

La limite élastique δ_{lim} ne dépend pas de la température.

Discussion :

- Le déclenchement des réarrangements de liaisons ne dépend *a priori* que de la structure microscopique, et donc peu de la température.
  (sauf changement de phase dû à T, milieu multiconstituants)
- Contrairement aux critères portant sur la déformation, les critères en contraintes dépendent naturellement de la température, car l'énergie libre massique de Helmholtz ψ^m (qui détermine $\boldsymbol{\sigma}$) est, entre autres, fonction de la température.
- Il est possible de construire un modèle de comportement avec une limite élastique $\delta_{lim}(T)$, mais le modèle est un peu plus complexe.
  (l'agitation thermique peut favoriser les réarrangements, il faut connaître la fonction $\delta_{lim}(T)$)

Notation

Dans la suite, la distorsion stérique maximale δ^s_{max} sera notée δ.

Choix de la variable d'état mnésique

Réécriture du critère de limite élastique :

On pose $\gamma = \sqrt{3}\sqrt{\delta^{2/3} - 1}$ et $\gamma_{lim} = \sqrt{3}\sqrt{{\delta_{lim}}^{2/3} - 1}$

Le critère $\gamma \leq \gamma_{lim}$ est équivalent à $\delta \leq \delta_{lim}$.

(car la fonction $x \to \sqrt{3}\sqrt{x^{2/3} - 1}$ est monotone croissante pour $x \geqslant 1$)

Interprétation cinématique :

γ est le paramètre $|u|/h$ dans un mouvement de glissement.

(la cinématique d'un glissement a été étudiée en élasticité)

Choix de la variable d'etat mnésique

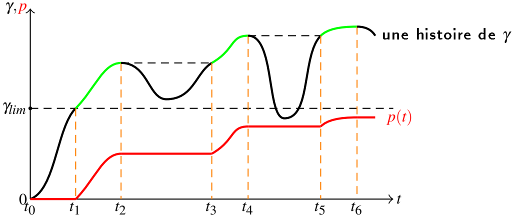
$$p(t) = \sup_{\tau \in [t_0\,; t]} \langle \gamma(\tau) - \gamma_{lim} \rangle \quad \text{où } \langle x \rangle = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

(« partie positive » de x)

La valeur actuelle $p(t)$ enregistre le plus grand dépassement de la limite élastique γ_{lim} depuis l'instant de référence t_0.

Propriétés de la variable mnésique

Rappel : $$p(t) = \sup_{\tau \in [t_0\,;t]} \langle \gamma(\tau) - \gamma_{lim} \rangle$$



Propriétés de p :

(démonstrations dans le pdf)

- La variable mnésique p est scalaire, objective et non négative.
- Pour tout état : $\gamma - p \leq \gamma_{lim}$.
- L'espace des état $\mathbb{R}^{m+2}$ est donc limité par une frontière :

  $$f_\gamma(I_1, \cdots, I_m) - p \leq \gamma_{lim},$$

  ce qui définit un espace des états admissibles pour ce modèle.

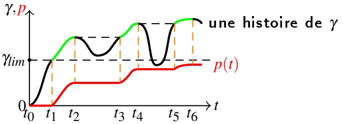
(γ peut être l'une des variables d'état cinématiques $\{I_1, \cdots, I_m\}$ retenues pour le modèle)

Loi d'évolution

Définition

On appelle « loi d'évolution » de la variable mnésique p, l'expression de sa dérivée particulaire $\dot{p}$.

$$p(t) = \sup_{\tau \in [t_0\,;t]} \langle \gamma(\tau) - \gamma_{lim} \rangle$$



$$\dot{p} = \begin{cases} \langle \dot{\gamma} \rangle & \text{si } \gamma(t) - p(t) = \gamma_{lim} \\ 0 & \text{si } \gamma(t) - p(t) < \gamma_{lim} \end{cases}$$

(état actuel sur la frontière des états admissibles)
(état actuel à l'intérieur des états admissibles)

$$\dot{p} = \mathscr{H}(\gamma - p - \gamma_{lim}) \langle \dot{\gamma} \rangle \quad \text{où } \mathscr{H}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

($\sim$ Heaviside)

Quelques calculs cinématiques :

(démonstrations dans le pdf)

$$\dot{\gamma} = \boldsymbol{S}_\gamma : \boldsymbol{D} \quad \text{où} \quad \boldsymbol{S}_\gamma = \frac{1}{\gamma}\left(\frac{\boldsymbol{B}}{K_v{}^{2/3}} - \boldsymbol{G}\right) - \frac{\gamma}{3}\boldsymbol{G} \quad \text{et} \quad \operatorname{tr}\boldsymbol{S}_\gamma = 0$$

(S_γ est un déviateur)

Remarque : Si la déformation devient sphérique ($\boldsymbol{B} \to K_v{}^{2/3}\boldsymbol{G}$ et $\gamma \to 0$)

$$\lim_{\gamma \to 0} \frac{1}{\gamma}\left(\frac{\boldsymbol{B}}{K_v{}^{2/3}} - \boldsymbol{G}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(3 \lim_{\gamma \to 0} \boldsymbol{E}_1^V - \boldsymbol{G}\right)$$

(utile pour l'implémentation numérique)

Comportement mécanique (1/2)

Dissipation intrinsèque :

$\forall \dot{T} \, \forall \boldsymbol{D}$, (pour toute vitesse d'évolution à partir de tout état)

$$\Phi_{int} = -\rho\,(\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s)\,\dot{T} + (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref}) : \boldsymbol{D} - \rho\,\partial_p \bar{f}_\psi\,\dot{p} \geqslant 0$$

(α remplacé par p)

$$\Phi_{int} = -\rho\,(\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s)\,\dot{T} + \underbrace{(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref}) : \boldsymbol{D} - \rho\,\partial_p \bar{f}_\psi\,\mathscr{H}(\gamma - p - \gamma_{lim})\,\langle \boldsymbol{S}_\gamma : \boldsymbol{D} \rangle}_{\text{indépendant de } \dot{T}} \geqslant 0$$

Relation de Helmholtz : $\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s = 0$ (raisonnement habituel)

Comportement mécanique :

- si $\gamma - p - \gamma_{lim} = 0$ **et** $\dot{\gamma} = \boldsymbol{S}_\gamma : \boldsymbol{D} > 0$, (l'état évolue sur la frontière admissible)

  L'évolution est plastifiante ($\dot{p} > 0$).

  $\forall \boldsymbol{D}$, $\Phi_{int} = (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref} - \rho\,\partial_p \bar{f}_\psi\,\boldsymbol{S}_\gamma) : \boldsymbol{D} \geqslant 0$

  $\Rightarrow$ $\exists \boldsymbol{f}$ tel que $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref} + \rho\,\partial_p \bar{f}_\psi\,\boldsymbol{S}_\gamma + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{D}, \cdots)$

- si $\gamma - p - \gamma_{lim} < 0$ **ou** $\dot{\gamma} = \boldsymbol{S}_\gamma : \boldsymbol{D} \leq 0$, (état intérieur **ou** évoluant vers l'intérieur)

  L'évolution est non plastifiante ($\dot{p} = 0$).

  $\forall \boldsymbol{D}$, $\Phi_{int} = (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref}) : \boldsymbol{D} \geqslant 0$

  $\Rightarrow$ $\exists \boldsymbol{g}$ tel que $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref} + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{D}, \cdots)$

Comportement mécanique (2/2)

Deux lois de comportement :

- En évolution plastifiante : (l'état évolue sur la frontière admissible et $\dot{\gamma} > 0$)

  $$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref} + \rho\,\partial_p \bar{f}_\psi \boldsymbol{S}_\gamma + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{D},\cdots) \quad \text{où} \ \ \forall \boldsymbol{D},\ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{D},\cdots) : \boldsymbol{D} \geqslant 0 \quad (\Phi_{int} \geqslant 0)$$

- En évolution non plastifiante : (l'état est intérieur ou $\dot{\gamma} \leq 0$)

  $$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref} + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{D},\cdots) \quad \text{où} \ \ \forall \boldsymbol{D},\ \boldsymbol{g}(\boldsymbol{D},\cdots) : \boldsymbol{D} \geqslant 0 \quad (\Phi_{int} \geqslant 0)$$

Continuité de $\boldsymbol{\sigma}$ sur la frontière des états admissibles :

$\forall \boldsymbol{D}$ et $\forall$état sur la frontière, (c'est-à-dire quand $\gamma - p = \gamma_{lim}$)

$$\boldsymbol{\sigma}_{\text{évol. plast.}} = \boldsymbol{\sigma}_{\text{évol. non plast.}} \qquad \Rightarrow$$

① $\left[\partial_p \bar{f}_\psi\right]_{(\gamma - p = \gamma_{lim})} = 0$ (condition sur la fonction d'état $\partial_p \bar{f}_\psi$)

$$\Leftrightarrow \quad \left(\partial_p \bar{f}_\psi\right)(T, I_1, \cdots, I_m, \underbrace{f_\gamma(I_1, \cdots, I_m) - \gamma_{lim}}_{p = \gamma - \gamma_{lim}}) = 0 \qquad (\text{éq. diff. sur } \bar{f}_\psi)$$

Contrainte en évolution plastifiante : $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref} + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{D},\cdots)$

② $\left[\boldsymbol{g}(\boldsymbol{D},\cdots)\right]_{(\gamma - p = \gamma_{lim})} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{D},\cdots)$ (cond. sur les fonctions dissipatives)

Récapitulation

- Variables d'état : $\{T,\underbrace{I_1,\cdots,I_m}_{(\boldsymbol{X},\boldsymbol{N}_i^\bullet)},p\}$ où $p(t)=\sup\limits_{\tau\in[t_0\,;t]}\langle\gamma(\tau)-\gamma_{lim}\rangle$
- Espace des états admissibles : $\underbrace{f_\gamma(I_1,\cdots,I_m)}_{\gamma}-p\leq\gamma_{lim}$
- Loi d'évolution : $\dot{p}=\mathscr{H}(\gamma-p-\gamma_{lim})\,\langle\dot{\gamma}\rangle$ où $\dot{\gamma}=\boldsymbol{S}_\gamma:\boldsymbol{D}$
- Loi de comportement mécanique :

$$\Phi_{int}\geqslant 0 \quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{\sigma}_{ref}^{(p)}+\boldsymbol{\sigma}_d(\boldsymbol{D},\mathscr{H}(\gamma-p-\gamma_{lim}),\cdots)$$

où $\boldsymbol{\sigma}_{ref}^{(p)}=\rho\sum\limits_{j=1}^{m}\partial_{I_j}\bar{f}_\psi\,\boldsymbol{S}_j$ (« contrainte élastique », mais fonction de p à cause de f_ψ)

(la contrainte dissipative $\boldsymbol{\sigma}_d$ peut être choisie nulle : plasticité sans dissipation intrinsèque)

- Loi de comportement thermique :

$$\Phi_{th}\geqslant 0 \quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{q}=\boldsymbol{f_q}(\mathbf{grad}_E\,T,\cdots)$$

Pour terminer le modèle, il reste à construire une fonction d'état $\bar{f}_\psi(T,I_1,\cdots,I_m,p)$ physiquement motivée, avec $\left[\partial_p\bar{f}_\psi\right]_{(\gamma-p=\gamma_{lim})}=0$.

Construction d'une énergie libre (1/4)

Variables d'état : $\{T, K_v, \gamma, p\}$ (plasticité d'un solide déformable isotrope)

Loi d'évolution : $\dot{p} = \mathscr{H}(\gamma - p - \gamma_{lim})\,\langle\dot{\gamma}\rangle$ (états admissibles : $\gamma - p - \gamma_{lim} \leq 0$)

Un chemin pour aller à un état admissible quelconque :

$$\underbrace{E_0 = (T_0, 1, 0, 0)}_{\text{état de réf.}} \xrightarrow{\mathscr{C}^{(1)}} E_1 = (T, 1, 0, 0) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(2)}} E_2 = (T, K_v, 0, 0) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(3)}}$$

$$E_3 = (T, K_v, \gamma_{lim}, 0) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(4)}} E_4 = (T, K_v, \gamma_{lim} + p, p) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(5)}} \underbrace{E_t = (T, K_v, \gamma, p)}_{\text{état final}}$$

$$\psi_1^m - \psi_0^m = g^{(1)}(T) \qquad g^{(1)}(T_0) = 0$$

$$\psi_2^m - \psi_1^m = g^{(2)}(T, K_v) \qquad \forall T,\ g^{(2)}(T, 1) = 0$$

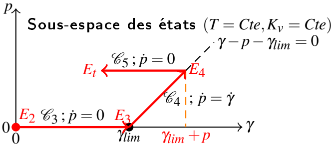
$$\psi_3^m - \psi_2^m = g^{(3)}(T, K_v, \gamma_{lim}) \qquad \forall T \forall K_v,\ g^{(3)}(T, K_v, 0) = 0$$

(si $\gamma_{lim} = 0$, plastif. immédiate)

$$\psi_4^m - \psi_3^m = g^{(4)}(T, K_v, p) \qquad \forall T \forall K_v,\ g^{(4)}(T, K_v, 0) = 0$$

$$\psi^m - \psi_4^m = g^{(5)}(T, K_v, \gamma, p) \qquad \forall T \forall K_v \forall p,\ g^{(5)}(T, K_v, \gamma_{lim} + p, p) = 0$$

(si $\gamma = \gamma_{lim} + p$: frontière)



Construction d'une énergie libre (1/4)

Variables d'état : $\{T, K_v, \gamma, p\}$ (plasticité d'un solide déformable isotrope)

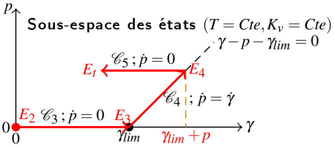
Loi d'évolution : $\dot{p} = \mathscr{H}(\gamma - p - \gamma_{lim})\langle\dot{\gamma}\rangle$ (états admissibles : $\gamma - p - \gamma_{lim} \leq 0$)

Un chemin pour aller à un état admissible quelconque :

$$\underbrace{E_0 = (T_0, 1, 0, 0)}_{\text{état de réf.}} \xrightarrow{\mathscr{C}^{(1)}} E_1 = (T, 1, 0, 0) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(2)}} E_2 = (T, K_v, 0, 0) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(3)}}$$

$$E_3 = (T, K_v, \gamma_{lim}, 0) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(4)}} E_4 = (T, K_v, \gamma_{lim} + p, p) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(5)}} \underbrace{E_t = (T, K_v, \gamma, p)}_{\text{état final}}$$

$$\begin{aligned}
\psi_1^m - \psi_0^m &= g^{(1)}(T) && g^{(1)}(T_0) = 0 \\
\psi_2^m - \psi_1^m &= g^{(2)}(T, K_v) && \forall T,\ g^{(2)}(T, 1) = 0 \\
\psi_3^m - \psi_2^m &= g^{(3)}(T, K_v, \gamma_{lim}) && \forall T \forall K_v,\ g^{(3)}(T, K_v, 0) = 0 \quad \text{(si } \gamma_{lim} = 0\text{, plastif. immédiate)} \\
\psi_4^m - \psi_3^m &= g^{(4)}(T, K_v, p) && \forall T \forall K_v,\ g^{(4)}(T, K_v, 0) = 0 \\
\psi^m - \psi_4^m &= g^{(5)}(T, K_v, \gamma, p) && \forall T \forall K_v \forall p,\ g^{(5)}(T, K_v, \gamma_{lim} + p, p) = 0 \quad \text{(si } \gamma = \gamma_{lim} + p \text{ : frontière)}
\end{aligned}$$



Construction d'une énergie libre (1/4)

Variables d'état : $\{T, K_v, \gamma, p\}$ (plasticité d'un solide déformable isotrope)

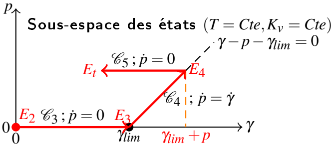
Loi d'évolution : $\dot{p} = \mathscr{H}(\gamma - p - \gamma_{lim})\,\langle\dot{\gamma}\rangle$ (états admissibles : $\gamma - p - \gamma_{lim} \leq 0$)

Un chemin pour aller à un état admissible quelconque :

$$\underbrace{E_0 = (T_0, 1, 0, 0)}_{\text{état de réf.}} \xrightarrow{\mathscr{C}^{(1)}} E_1 = (T, 1, 0, 0) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(2)}} E_2 = (T, K_v, 0, 0) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(3)}}$$

$$E_3 = (T, K_v, \gamma_{lim}, 0) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(4)}} E_4 = (T, K_v, \gamma_{lim}+p, p) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(5)}} \underbrace{E_t = (T, K_v, \gamma, p)}_{\text{état final}}$$

$$\begin{array}{lll}
\psi_1^m - \psi_0^m = g^{(1)}(T) & g^{(1)}(T_0) = 0 & \\
\psi_2^m - \psi_1^m = g^{(2)}(T, K_v) & \forall T,\ g^{(2)}(T, 1) = 0 & \\
\psi_3^m - \psi_2^m = g^{(3)}(T, K_v, \gamma_{lim}) & \forall T \forall K_v,\ g^{(3)}(T, K_v, 0) = 0 & \text{(si } \gamma_{lim} = 0\text{, plastif. immédiate)} \\
\psi_4^m - \psi_3^m = g^{(4)}(T, K_v, p) & \forall T \forall K_v,\ g^{(4)}(T, K_v, 0) = 0 & \\
\psi^m - \psi_4^m = g^{(5)}(T, K_v, \gamma, p) & \forall T \forall K_v \forall p,\ g^{(5)}(T, K_v, \gamma_{lim}+p, p) = 0 & \text{(si } \gamma = \gamma_{lim}+p \text{ : frontière)}
\end{array}$$



Construction d'une énergie libre (1/4)

Variables d'état : $\{T, K_v, \gamma, p\}$ (plasticité d'un solide déformable isotrope)

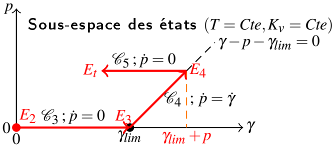
Loi d'évolution : $\dot{p} = \mathscr{H}(\gamma - p - \gamma_{lim})\,\langle\dot{\gamma}\rangle$ (états admissibles : $\gamma - p - \gamma_{lim} \leq 0$)

Un chemin pour aller à un état admissible quelconque :

$$\underbrace{E_0 = (T_0, 1, 0, 0)}_{\text{état de réf.}} \xrightarrow{\mathscr{C}^{(1)}} E_1 = (T, 1, 0, 0) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(2)}} E_2 = (T, K_v, 0, 0) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(3)}}$$

$$E_3 = (T, K_v, \gamma_{lim}, 0) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(4)}} E_4 = (T, K_v, \gamma_{lim} + p, p) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(5)}} \underbrace{E_t = (T, K_v, \gamma, p)}_{\text{état final}}$$

$$\begin{array}{ll}
\psi_1^m - \psi_0^m = g^{(1)}(T) & g^{(1)}(T_0) = 0 \\
\psi_2^m - \psi_1^m = g^{(2)}(T, K_v) & \forall T,\ g^{(2)}(T, 1) = 0 \\
\psi_3^m - \psi_2^m = g^{(3)}(T, K_v, \gamma_{lim}) & \forall T \forall K_v,\ g^{(3)}(T, K_v, 0) = 0 \quad \text{(si } \gamma_{lim} = 0 \text{, plastif. immédiate)} \\
\psi_4^m - \psi_3^m = g^{(4)}(T, K_v, p) & \forall T \forall K_v,\ g^{(4)}(T, K_v, 0) = 0 \\
\psi^m - \psi_4^m = g^{(5)}(T, K_v, \gamma, p) & \forall T \forall K_v \forall p,\ g^{(5)}(T, K_v, \gamma_{lim} + p, p) = 0 \quad \text{(si } \gamma = \gamma_{lim} + p \text{ : frontière)}
\end{array}$$



Construction d'une énergie libre (1/4)

Variables d'état : $\{T, K_v, \gamma, p\}$ (plasticité d'un solide déformable isotrope)

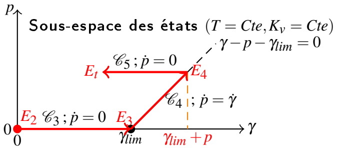
Loi d'évolution : $\dot{p} = \mathscr{H}(\gamma - p - \gamma_{lim})\,\langle\dot{\gamma}\rangle$ (états admissibles : $\gamma - p - \gamma_{lim} \leq 0$)

Un chemin pour aller à un état admissible quelconque :

$$\underbrace{E_0 = (T_0, 1, 0, 0)}_{\text{état de réf.}} \xrightarrow{\mathscr{C}^{(1)}} E_1 = (T, 1, 0, 0) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(2)}} E_2 = (T, K_v, 0, 0) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(3)}}$$

$$E_3 = (T, K_v, \gamma_{lim}, 0) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(4)}} E_4 = (T, K_v, \gamma_{lim} + p, p) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(5)}} \underbrace{E_t = (T, K_v, \gamma, p)}_{\text{état final}}$$

$$\begin{array}{ll}
\psi_1^m - \psi_0^m = g^{(1)}(T) & g^{(1)}(T_0) = 0 \\
\psi_2^m - \psi_1^m = g^{(2)}(T, K_v) & \forall T,\ g^{(2)}(T, 1) = 0 \\
\psi_3^m - \psi_2^m = g^{(3)}(T, K_v, \gamma_{lim}) & \forall T \forall K_v,\ g^{(3)}(T, K_v, 0) = 0 \quad \text{(si } \gamma_{lim} = 0\text{, plastif. immédiate)} \\
\psi_4^m - \psi_3^m = g^{(4)}(T, K_v, p) & \forall T \forall K_v,\ g^{(4)}(T, K_v, 0) = 0 \\
\psi^m - \psi_4^m = g^{(5)}(T, K_v, \gamma, p) & \forall T \forall K_v \forall p,\ g^{(5)}(T, K_v, \gamma_{lim} + p, p) = 0 \quad \text{(si } \gamma = \gamma_{lim} + p \text{ : frontière)}
\end{array}$$



Construction d'une énergie libre (1/4)

Variables d'état : $\{T,K_v,\gamma,p\}$ (plasticité d'un solide déformable isotrope)

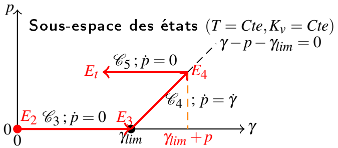
Loi d'évolution : $\dot{p}=\mathscr{H}(\gamma-p-\gamma_{lim})\,\langle\dot{\gamma}\rangle$ (états admissibles : $\gamma-p-\gamma_{lim}\leq 0$)

Un chemin pour aller à un état admissible quelconque :

$$\underbrace{E_0=(T_0,1,0,0)}_{\text{état de réf.}} \xrightarrow{\mathscr{C}^{(1)}} E_1=(T,1,0,0) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(2)}} E_2=(T,K_v,0,0) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(3)}}$$

$$E_3=(T,K_v,\gamma_{lim},0) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(4)}} E_4=(T,K_v,\gamma_{lim}+p,p) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(5)}} \underbrace{E_t=(T,K_v,\gamma,p)}_{\text{état final}}$$

$$\begin{aligned}
\psi_1^m-\psi_0^m &= g^{(1)}(T) && g^{(1)}(T_0)=0 \\
\psi_2^m-\psi_1^m &= g^{(2)}(T,K_v) && \forall T,\ g^{(2)}(T,1)=0 \\
\psi_3^m-\psi_2^m &= g^{(3)}(T,K_v,\gamma_{lim}) && \forall T\forall K_v,\ g^{(3)}(T,K_v,0)=0 \quad \text{(si } \gamma_{lim}=0,\text{ plastif. immédiate)} \\
\psi_4^m-\psi_3^m &= g^{(4)}(T,K_v,p) && \forall T\forall K_v,\ g^{(4)}(T,K_v,0)=0 \\
\psi^m-\psi_4^m &= g^{(5)}(T,K_v,\gamma,p) && \forall T\forall K_v\forall p,\ g^{(5)}(T,K_v,\gamma_{lim}+p,p)=0 \quad \text{(si } \gamma=\gamma_{lim}+p \text{ : frontière)}
\end{aligned}$$



Sous-espace des états $(T=Cte,K_v=Cte)$

Construction d'une énergie libre (1/4)

Variables d'état : $\{T, K_v, \gamma, p\}$ (plasticité d'un solide déformable isotrope)

Loi d'évolution : $\dot{p} = \mathscr{H}(\gamma - p - \gamma_{lim})\,\langle\dot{\gamma}\rangle$ (états admissibles : $\gamma - p - \gamma_{lim} \leq 0$)

Un chemin pour aller à un état admissible quelconque :

$$\underbrace{E_0 = (T_0, 1, 0, 0)}_{\text{état de réf.}} \xrightarrow{\mathscr{C}^{(1)}} E_1 = (T, 1, 0, 0) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(2)}} E_2 = (T, K_v, 0, 0) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(3)}}$$

$$E_3 = (T, K_v, \gamma_{lim}, 0) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(4)}} E_4 = (T, K_v, \gamma_{lim} + p, p) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(5)}} \underbrace{E_t = (T, K_v, \gamma, p)}_{\text{état final}}$$

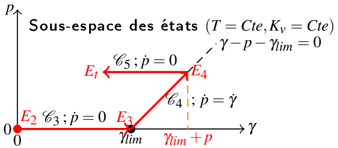
$\psi_1^m - \psi_0^m = g^{(1)}(T)$ $\quad g^{(1)}(T_0) = 0$

$\psi_2^m - \psi_1^m = g^{(2)}(T, K_v)$ $\quad \forall T,\ g^{(2)}(T, 1) = 0$

$\psi_3^m - \psi_2^m = g^{(3)}(T, K_v, \gamma_{lim})$ $\quad \forall T \forall K_v,\ g^{(3)}(T, K_v, 0) = 0$ (si $\gamma_{lim} = 0$, plastif. immédiate)

$\psi_4^m - \psi_3^m = g^{(4)}(T, K_v, p)$ $\quad \forall T \forall K_v,\ g^{(4)}(T, K_v, 0) = 0$

$\psi^m - \psi_4^m = g^{(5)}(T, K_v, \gamma, p)$ $\quad \forall T \forall K_v \forall p,\ g^{(5)}(T, K_v, \gamma_{lim} + p, p) = 0$ (si $\gamma = \gamma_{lim} + p$: frontière)



Sous-espace des états $(T = Cte, K_v = Cte)$

Construction d'une énergie libre (1/4)

Variables d'état : $\{T, K_v, \gamma, p\}$ (plasticité d'un solide déformable isotrope)

Loi d'évolution : $\dot{p} = \mathscr{H}(\gamma - p - \gamma_{lim})\,\langle\dot{\gamma}\rangle$ (états admissibles : $\gamma - p - \gamma_{lim} \leq 0$)

Un chemin pour aller à un état admissible quelconque :

$$\underbrace{E_0 = (T_0, 1, 0, 0)}_{\text{état de réf.}} \xrightarrow{\mathscr{C}^{(1)}} E_1 = (T, 1, 0, 0) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(2)}} E_2 = (T, K_v, 0, 0) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(3)}}$$

$$E_3 = (T, K_v, \gamma_{lim}, 0) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(4)}} E_4 = (T, K_v, \gamma_{lim} + p, p) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(5)}} \underbrace{E_t = (T, K_v, \gamma, p)}_{\text{état final}}$$

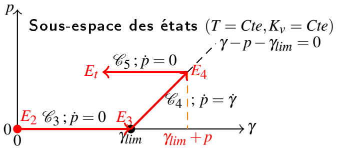
$$\psi_1^m - \psi_0^m = g^{(1)}(T) \qquad g^{(1)}(T_0) = 0$$

$$\psi_2^m - \psi_1^m = g^{(2)}(T, K_v) \qquad \forall T,\ g^{(2)}(T, 1) = 0$$

$$\psi_3^m - \psi_2^m = g^{(3)}(T, K_v, \gamma_{lim}) \qquad \forall T \forall K_v,\ g^{(3)}(T, K_v, 0) = 0 \quad \text{(si } \gamma_{lim} = 0\text{, plastif. immédiate)}$$

$$\psi_4^m - \psi_3^m = g^{(4)}(T, K_v, p) \qquad \forall T \forall K_v,\ g^{(4)}(T, K_v, 0) = 0$$

$$\psi^m - \psi_4^m = g^{(5)}(T, K_v, \gamma, p) \qquad \forall T \forall K_v \forall p,\ g^{(5)}(T, K_v, \gamma_{lim} + p, p) = 0 \quad \text{(si } \gamma = \gamma_{lim} + p \text{ : frontière)}$$



Construction d'une énergie libre (1/4)

Variables d'état : $\{T, K_v, \gamma, p\}$ (plasticité d'un solide déformable isotrope)

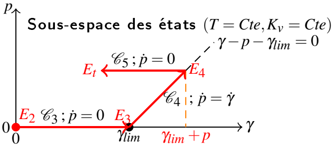
Loi d'évolution : $\dot{p} = \mathscr{H}(\gamma - p - \gamma_{lim})\,\langle\dot{\gamma}\rangle$ (états admissibles : $\gamma - p - \gamma_{lim} \leq 0$)

Un chemin pour aller à un état admissible quelconque :

$$\underbrace{E_0 = (T_0, 1, 0, 0)}_{\text{état de réf.}} \xrightarrow{\mathscr{C}^{(1)}} E_1 = (T, 1, 0, 0) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(2)}} E_2 = (T, K_v, 0, 0) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(3)}}$$

$$E_3 = (T, K_v, \gamma_{lim}, 0) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(4)}} E_4 = (T, K_v, \gamma_{lim} + p, p) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(5)}} \underbrace{E_t = (T, K_v, \gamma, p)}_{\text{état final}}$$

$$\begin{array}{lll}
\psi_1^m - \psi_0^m = g^{(1)}(T) & g^{(1)}(T_0) = 0 & \\
\psi_2^m - \psi_1^m = g^{(2)}(T, K_v) & \forall T,\ g^{(2)}(T, 1) = 0 & \\
\psi_3^m - \psi_2^m = g^{(3)}(T, K_v, \gamma_{lim}) & \forall T \forall K_v,\ g^{(3)}(T, K_v, 0) = 0 & (\text{si } \gamma_{lim} = 0, \text{ plastif. immédiate}) \\
\psi_4^m - \psi_3^m = g^{(4)}(T, K_v, p) & \forall T \forall K_v,\ g^{(4)}(T, K_v, 0) = 0 & \\
\psi^m - \psi_4^m = g^{(5)}(T, K_v, \gamma, p) & \forall T \forall K_v \forall p,\ g^{(5)}(T, K_v, \gamma_{lim} + p, p) = 0 & (\text{si } \gamma = \gamma_{lim} + p \text{ : frontière})
\end{array}$$



Construction d'une énergie libre (1/4)

Variables d'état : $\{T,K_v,\gamma,p\}$ (plasticité d'un solide déformable isotrope)

Loi d'évolution : $\dot{p}=\mathscr{H}(\gamma-p-\gamma_{lim})\,\langle\dot{\gamma}\rangle$ (états admissibles : $\gamma-p-\gamma_{lim}\leq 0$)

Un chemin pour aller à un état admissible quelconque :

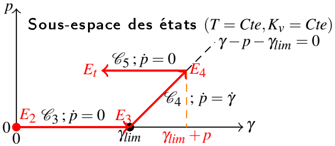
$$\underbrace{E_0=(T_0,1,0,0)}_{\text{état de réf.}} \xrightarrow{\mathscr{C}^{(1)}} E_1=(T,1,0,0) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(2)}} E_2=(T,K_v,0,0) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(3)}}$$

$$E_3=(T,K_v,\gamma_{lim},0) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(4)}} E_4=(T,K_v,\gamma_{lim}+p,p) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(5)}} \underbrace{E_t=(T,K_v,\gamma,p)}_{\text{état final}}$$

$$\begin{aligned}
&\psi_1^m-\psi_0^m=g^{(1)}(T) && g^{(1)}(T_0)=0\\
&\psi_2^m-\psi_1^m=g^{(2)}(T,K_v) && \forall T,\ g^{(2)}(T,1)=0\\
&\psi_3^m-\psi_2^m=g^{(3)}(T,K_v,\gamma_{lim}) && \forall T\forall K_v,\ g^{(3)}(T,K_v,0)=0\\
&\psi_4^m-\psi_3^m=g^{(4)}(T,K_v,p) && \forall T\forall K_v,\ g^{(4)}(T,K_v,0)=0\\
&\psi^m-\psi_4^m=g^{(5)}(T,K_v,\gamma,p) && \forall T\forall K_v\forall p,\ g^{(5)}(T,K_v,\gamma_{lim}+p,p)=0
\end{aligned}$$

(si $\gamma_{lim}=0$, plastif. immédiate)

(si $\gamma=\gamma_{lim}+p$: frontière)



Construction d'une énergie libre (1/4)

Variables d'état : $\{T, K_v, \gamma, p\}$ (plasticité d'un solide déformable isotrope)

Loi d'évolution : $\dot{p} = \mathscr{H}(\gamma - p - \gamma_{lim})\,\langle\dot{\gamma}\rangle$ (états admissibles : $\gamma - p - \gamma_{lim} \leq 0$)

Un chemin pour aller à un état admissible quelconque :

$$\underbrace{E_0 = (T_0, 1, 0, 0)}_{\text{état de réf.}} \xrightarrow{\mathscr{C}^{(1)}} E_1 = (T, 1, 0, 0) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(2)}} E_2 = (T, K_v, 0, 0) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(3)}}$$

$$E_3 = (T, K_v, \gamma_{lim}, 0) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(4)}} E_4 = (T, K_v, \gamma_{lim} + p, p) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(5)}} \underbrace{E_t = (T, K_v, \gamma, p)}_{\text{état final}}$$

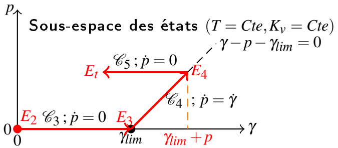
$$\psi_1^m - \psi_0^m = g^{(1)}(T) \qquad g^{(1)}(T_0) = 0$$

$$\psi_2^m - \psi_1^m = g^{(2)}(T, K_v) \qquad \forall T,\ g^{(2)}(T, 1) = 0$$

$$\psi_3^m - \psi_2^m = g^{(3)}(T, K_v, \gamma_{lim}) \qquad \forall T \forall K_v,\ g^{(3)}(T, K_v, 0) = 0$$ (si $\gamma_{lim} = 0$, plastif. immédiate)

$$\psi_4^m - \psi_3^m = g^{(4)}(T, K_v, p) \qquad \forall T \forall K_v,\ g^{(4)}(T, K_v, 0) = 0$$

$$\psi^m - \psi_4^m = g^{(5)}(T, K_v, \gamma, p) \qquad \forall T \forall K_v \forall p,\ g^{(5)}(T, K_v, \gamma_{lim} + p, p) = 0$$ (si $\gamma = \gamma_{lim} + p$: frontière)



Construction d'une énergie libre (1/4)

Variables d'état : $\{T, K_v, \gamma, p\}$ (plasticité d'un solide déformable isotrope)

Loi d'évolution : $\dot{p} = \mathscr{H}(\gamma - p - \gamma_{lim})\,\langle\dot{\gamma}\rangle$ (états admissibles : $\gamma - p - \gamma_{lim} \leq 0$)

Un chemin pour aller à un état admissible quelconque :

$$\underbrace{E_0 = (T_0, 1, 0, 0)}_{\text{état de réf.}} \xrightarrow{\mathscr{C}^{(1)}} E_1 = (T, 1, 0, 0) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(2)}} E_2 = (T, K_v, 0, 0) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(3)}}$$

$$E_3 = (T, K_v, \gamma_{lim}, 0) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(4)}} E_4 = (T, K_v, \gamma_{lim} + p, p) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(5)}} \underbrace{E_t = (T, K_v, \gamma, p)}_{\text{état final}}$$

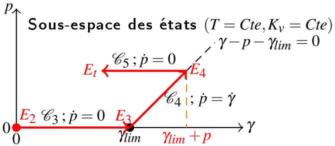
$$\psi_1^m - \psi_0^m = g^{(1)}(T) \qquad g^{(1)}(T_0) = 0$$

$$\psi_2^m - \psi_1^m = g^{(2)}(T, K_v) \qquad \forall T,\ g^{(2)}(T, 1) = 0$$

$$\psi_3^m - \psi_2^m = g^{(3)}(T, K_v, \gamma_{lim}) \qquad \forall T \forall K_v,\ g^{(3)}(T, K_v, 0) = 0$$ (si $\gamma_{lim} = 0$, plastif. immédiate)

$$\psi_4^m - \psi_3^m = g^{(4)}(T, K_v, p) \qquad \forall T \forall K_v,\ g^{(4)}(T, K_v, 0) = 0$$

$$\psi^m - \psi_4^m = g^{(5)}(T, K_v, \gamma, p) \qquad \forall T \forall K_v \forall p,\ g^{(5)}(T, K_v, \gamma_{lim} + p, p) = 0$$ (si $\gamma = \gamma_{lim} + p$: frontière)



Construction d'une énergie libre (1/4)

Variables d'état : $\{T, K_v, \gamma, p\}$ (plasticité d'un solide déformable isotrope)

Loi d'évolution : $\dot{p} = \mathscr{H}(\gamma - p - \gamma_{lim})\,\langle\dot{\gamma}\rangle$ (états admissibles : $\gamma - p - \gamma_{lim} \leq 0$)

Un chemin pour aller à un état admissible quelconque :

$$\underbrace{E_0 = (T_0, 1, 0, 0)}_{\text{état de réf.}} \xrightarrow{\mathscr{C}^{(1)}} E_1 = (T, 1, 0, 0) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(2)}} E_2 = (T, K_v, 0, 0) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(3)}}$$

$$E_3 = (T, K_v, \gamma_{lim}, 0) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(4)}} E_4 = (T, K_v, \gamma_{lim} + p, p) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(5)}} \underbrace{E_t = (T, K_v, \gamma, p)}_{\text{état final}}$$

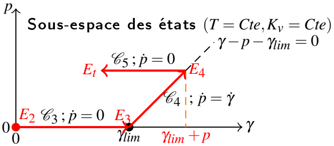
$$\psi_1^m - \psi_0^m = g^{(1)}(T) \qquad g^{(1)}(T_0) = 0$$

$$\psi_2^m - \psi_1^m = g^{(2)}(T, K_v) \qquad \forall T,\ g^{(2)}(T, 1) = 0$$

$$\psi_3^m - \psi_2^m = g^{(3)}(T, K_v, \gamma_{lim}) \qquad \forall T \forall K_v,\ g^{(3)}(T, K_v, 0) = 0 \quad (\text{si } \gamma_{lim} = 0, \text{ plastif. immédiate})$$

$$\psi_4^m - \psi_3^m = g^{(4)}(T, K_v, p) \qquad \forall T \forall K_v,\ g^{(4)}(T, K_v, 0) = 0$$

$$\psi^m - \psi_4^m = g^{(5)}(T, K_v, \gamma, p) \qquad \forall T \forall K_v \forall p,\ g^{(5)}(T, K_v, \gamma_{lim} + p, p) = 0 \quad (\text{si } \gamma = \gamma_{lim} + p \text{ : frontière})$$



Construction d'une énergie libre (1/4)

Variables d'état : $\{T, K_v, \gamma, p\}$ (plasticité d'un solide déformable isotrope)

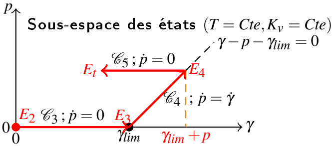
Loi d'évolution : $\dot{p} = \mathscr{H}(\gamma - p - \gamma_{lim})\,\langle\dot{\gamma}\rangle$ (états admissibles : $\gamma - p - \gamma_{lim} \leq 0$)

Un chemin pour aller à un état admissible quelconque :

$$\underbrace{E_0 = (T_0, 1, 0, 0)}_{\text{état de réf.}} \xrightarrow{\mathscr{C}^{(1)}} E_1 = (T, 1, 0, 0) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(2)}} E_2 = (T, K_v, 0, 0) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(3)}}$$

$$E_3 = (T, K_v, \gamma_{lim}, 0) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(4)}} E_4 = (T, K_v, \gamma_{lim} + p, p) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(5)}} \underbrace{E_t = (T, K_v, \gamma, p)}_{\text{état final}}$$

$$\begin{array}{lll}
\psi_1^m - \psi_0^m = g^{(1)}(T) & g^{(1)}(T_0) = 0 & \\
\psi_2^m - \psi_1^m = g^{(2)}(T, K_v) & \forall T,\ g^{(2)}(T, 1) = 0 & \\
\psi_3^m - \psi_2^m = g^{(3)}(T, K_v, \gamma_{lim}) & \forall T \forall K_v,\ g^{(3)}(T, K_v, 0) = 0 & (\text{si } \gamma_{lim} = 0, \text{ plastif. immédiate}) \\
\psi_4^m - \psi_3^m = g^{(4)}(T, K_v, p) & \forall T \forall K_v,\ g^{(4)}(T, K_v, 0) = 0 & \\
\psi^m - \psi_4^m = g^{(5)}(T, K_v, \gamma, p) & \forall T \forall K_v \forall p,\ g^{(5)}(T, K_v, \gamma_{lim} + p, p) = 0 & (\text{si } \gamma = \gamma_{lim} + p \text{ : frontière})
\end{array}$$



Construction d'une énergie libre (1/4)

Variables d'état : $\{T, K_v, \gamma, p\}$ (plasticité d'un solide déformable isotrope)

Loi d'évolution : $\dot{p} = \mathscr{H}(\gamma - p - \gamma_{lim})\,\langle\dot{\gamma}\rangle$ (états admissibles : $\gamma - p - \gamma_{lim} \leq 0$)

Un chemin pour aller à un état admissible quelconque :

$$\underbrace{E_0 = (T_0, 1, 0, 0)}_{\text{état de réf.}} \xrightarrow{\mathscr{C}^{(1)}} E_1 = (T, 1, 0, 0) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(2)}} E_2 = (T, K_v, 0, 0) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(3)}}$$

$$E_3 = (T, K_v, \gamma_{lim}, 0) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(4)}} E_4 = (T, K_v, \gamma_{lim} + p, p) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(5)}} \underbrace{E_t = (T, K_v, \gamma, p)}_{\text{état final}}$$

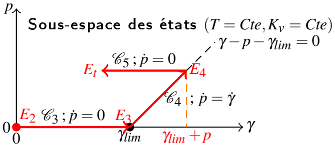
$$\psi_1^m - \psi_0^m = g^{(1)}(T) \qquad g^{(1)}(T_0) = 0$$

$$\psi_2^m - \psi_1^m = g^{(2)}(T, K_v) \qquad \forall T,\ g^{(2)}(T, 1) = 0$$

$$\psi_3^m - \psi_2^m = g^{(3)}(T, K_v, \gamma_{lim}) \qquad \forall T \forall K_v,\ g^{(3)}(T, K_v, 0) = 0$$ (si $\gamma_{lim} = 0$, plastif. immédiate)

$$\psi_4^m - \psi_3^m = g^{(4)}(T, K_v, p) \qquad \forall T \forall K_v,\ g^{(4)}(T, K_v, 0) = 0$$

$$\psi^m - \psi_4^m = g^{(5)}(T, K_v, \gamma, p) \qquad \forall T \forall K_v \forall p,\ g^{(5)}(T, K_v, \gamma_{lim} + p, p) = 0$$ (si $\gamma = \gamma_{lim} + p$: frontière)



Construction d'une énergie libre (1/4)

Variables d'état : $\{T, K_v, \gamma, p\}$ (plasticité d'un solide déformable isotrope)

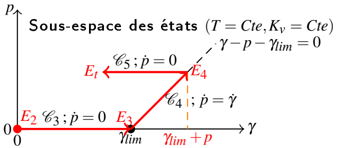
Loi d'évolution : $\dot{p} = \mathscr{H}(\gamma - p - \gamma_{lim})\,\langle\dot{\gamma}\rangle$ (états admissibles : $\gamma - p - \gamma_{lim} \leq 0$)

Un chemin pour aller à un état admissible quelconque :

$$\underbrace{E_0 = (T_0, 1, 0, 0)}_{\text{état de réf.}} \xrightarrow{\mathscr{C}^{(1)}} E_1 = (T, 1, 0, 0) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(2)}} E_2 = (T, K_v, 0, 0) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(3)}}$$

$$E_3 = (T, K_v, \gamma_{lim}, 0) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(4)}} E_4 = (T, K_v, \gamma_{lim} + p, p) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(5)}} \underbrace{E_t = (T, K_v, \gamma, p)}_{\text{état final}}$$

$$\begin{array}{ll}
\psi^m_1 - \psi^m_0 = g^{(1)}(T) & g^{(1)}(T_0) = 0 \\
\psi^m_2 - \psi^m_1 = g^{(2)}(T, K_v) & \forall T,\ g^{(2)}(T, 1) = 0 \\
\psi^m_3 - \psi^m_2 = g^{(3)}(T, K_v, \gamma_{lim}) & \forall T \forall K_v,\ g^{(3)}(T, K_v, 0) = 0 \quad (\text{si } \gamma_{lim} = 0, \text{ plastif. immédiate}) \\
\psi^m_4 - \psi^m_3 = g^{(4)}(T, K_v, p) & \forall T \forall K_v,\ g^{(4)}(T, K_v, 0) = 0 \\
\psi^m - \psi^m_4 = g^{(5)}(T, K_v, \gamma, p) & \forall T \forall K_v \forall p,\ g^{(5)}(T, K_v, \gamma_{lim} + p, p) = 0 \quad (\text{si } \gamma = \gamma_{lim} + p \text{ : frontière})
\end{array}$$



Construction d'une énergie libre (1/4)

Variables d'état : $\{T, K_v, \gamma, p\}$ (plasticité d'un solide déformable isotrope)

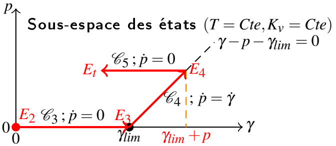
Loi d'évolution : $\dot{p} = \mathscr{H}(\gamma - p - \gamma_{lim})\,\langle\dot{\gamma}\rangle$ (états admissibles : $\gamma - p - \gamma_{lim} \leq 0$)

Un chemin pour aller à un état admissible quelconque :

$$\underbrace{E_0 = (T_0, 1, 0, 0)}_{\text{état de réf.}} \xrightarrow{\mathscr{C}^{(1)}} E_1 = (T, 1, 0, 0) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(2)}} E_2 = (T, K_v, 0, 0) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(3)}}$$

$$E_3 = (T, K_v, \gamma_{lim}, 0) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(4)}} E_4 = (T, K_v, \gamma_{lim} + p, p) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(5)}} \underbrace{E_t = (T, K_v, \gamma, p)}_{\text{état final}}$$

$$\begin{array}{lll}
\psi_1^m - \psi_0^m = g^{(1)}(T) & g^{(1)}(T_0) = 0 & \\
\psi_2^m - \psi_1^m = g^{(2)}(T, K_v) & \forall T,\ g^{(2)}(T, 1) = 0 & \\
\psi_3^m - \psi_2^m = g^{(3)}(T, K_v, \gamma_{lim}) & \forall T \forall K_v,\ g^{(3)}(T, K_v, 0) = 0 & (\text{si } \gamma_{lim} = 0, \text{ plastif. immédiate}) \\
\psi_4^m - \psi_3^m = g^{(4)}(T, K_v, p) & \forall T \forall K_v,\ g^{(4)}(T, K_v, 0) = 0 & \\
\psi^m - \psi_4^m = g^{(5)}(T, K_v, \gamma, p) & \forall T \forall K_v \forall p,\ g^{(5)}(T, K_v, \gamma_{lim} + p, p) = 0 & (\text{si } \gamma = \gamma_{lim} + p \text{ : frontière})
\end{array}$$



Construction d'une énergie libre (1/4)

Variables d'état : $\{T, K_v, \gamma, p\}$ (plasticité d'un solide déformable isotrope)

Loi d'évolution : $\dot{p} = \mathscr{H}(\gamma - p - \gamma_{lim})\,\langle\dot{\gamma}\rangle$ (états admissibles : $\gamma - p - \gamma_{lim} \leq 0$)

Un chemin pour aller à un état admissible quelconque :

$$\underbrace{E_0 = (T_0, 1, 0, 0)}_{\text{état de réf.}} \xrightarrow{\mathscr{C}^{(1)}} E_1 = (T, 1, 0, 0) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(2)}} E_2 = (T, K_v, 0, 0) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(3)}}$$

$$E_3 = (T, K_v, \gamma_{lim}, 0) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(4)}} E_4 = (T, K_v, \gamma_{lim} + p, p) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(5)}} \underbrace{E_t = (T, K_v, \gamma, p)}_{\text{état final}}$$

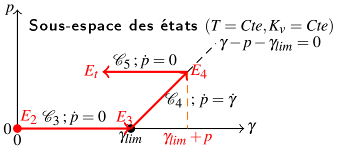
$$\psi_1^m - \psi_0^m = g^{(1)}(T) \qquad g^{(1)}(T_0) = 0$$

$$\psi_2^m - \psi_1^m = g^{(2)}(T, K_v) \qquad \forall T,\ g^{(2)}(T, 1) = 0$$

$$\psi_3^m - \psi_2^m = g^{(3)}(T, K_v, \gamma_{lim}) \qquad \forall T \forall K_v,\ g^{(3)}(T, K_v, 0) = 0$$ (si $\gamma_{lim} = 0$, plastif. immédiate)

$$\psi_4^m - \psi_3^m = g^{(4)}(T, K_v, p) \qquad \forall T \forall K_v,\ g^{(4)}(T, K_v, 0) = 0$$

$$\psi^m - \psi_4^m = g^{(5)}(T, K_v, \gamma, p) \qquad \forall T \forall K_v \forall p,\ g^{(5)}(T, K_v, \gamma_{lim} + p, p) = 0$$ (si $\gamma = \gamma_{lim} + p$: frontière)



Construction d'une énergie libre (1/4)

Variables d'état : $\{T, K_v, \gamma, p\}$ (plasticité d'un solide déformable isotrope)

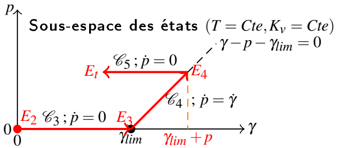
Loi d'évolution : $\dot{p} = \mathscr{H}(\gamma - p - \gamma_{lim})\,\langle\dot{\gamma}\rangle$ (états admissibles : $\gamma - p - \gamma_{lim} \leq 0$)

Un chemin pour aller à un état admissible quelconque :

$$\underbrace{E_0 = (T_0, 1, 0, 0)}_{\text{état de réf.}} \xrightarrow{\mathscr{C}^{(1)}} E_1 = (T, 1, 0, 0) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(2)}} E_2 = (T, K_v, 0, 0) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(3)}}$$

$$E_3 = (T, K_v, \gamma_{lim}, 0) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(4)}} E_4 = (T, K_v, \gamma_{lim} + p, p) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(5)}} \underbrace{E_t = (T, K_v, \gamma, p)}_{\text{état final}}$$

$$\begin{array}{ll}
\psi_1^m - \psi_0^m = g^{(1)}(T) & g^{(1)}(T_0) = 0 \\
\psi_2^m - \psi_1^m = g^{(2)}(T, K_v) & \forall T,\ g^{(2)}(T, 1) = 0 \\
\psi_3^m - \psi_2^m = g^{(3)}(T, K_v, \gamma_{lim}) & \forall T \forall K_v,\ g^{(3)}(T, K_v, 0) = 0 \quad \text{(si } \gamma_{lim} = 0, \text{ plastif. immédiate)} \\
\psi_4^m - \psi_3^m = g^{(4)}(T, K_v, p) & \forall T \forall K_v,\ g^{(4)}(T, K_v, 0) = 0 \\
\psi^m - \psi_4^m = g^{(5)}(T, K_v, \gamma, p) & \forall T \forall K_v \forall p,\ g^{(5)}(T, K_v, \gamma_{lim} + p, p) = 0 \quad \text{(si } \gamma = \gamma_{lim} + p \text{ : frontière)}
\end{array}$$



Construction d'une énergie libre (1/4)

Variables d'état : $\{T, K_v, \gamma, p\}$ (plasticité d'un solide déformable isotrope)

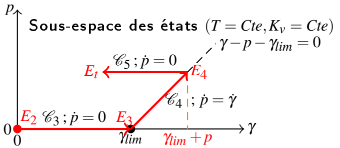
Loi d'évolution : $\dot{p} = \mathscr{H}(\gamma - p - \gamma_{lim})\,\langle\dot{\gamma}\rangle$ (états admissibles : $\gamma - p - \gamma_{lim} \leq 0$)

Un chemin pour aller à un état admissible quelconque :

$$\underbrace{E_0 = (T_0, 1, 0, 0)}_{\text{état de réf.}} \overset{\mathscr{C}^{(1)}}{\longrightarrow} E_1 = (T, 1, 0, 0) \overset{\mathscr{C}^{(2)}}{\longrightarrow} E_2 = (T, K_v, 0, 0) \overset{\mathscr{C}^{(3)}}{\longrightarrow}$$

$$E_3 = (T, K_v, \gamma_{lim}, 0) \overset{\mathscr{C}^{(4)}}{\longrightarrow} E_4 = (T, K_v, \gamma_{lim} + p, p) \overset{\mathscr{C}^{(5)}}{\longrightarrow} \underbrace{E_t = (T, K_v, \gamma, p)}_{\text{état final}}$$

$$\begin{array}{ll}
\psi_1^m - \psi_0^m = g^{(1)}(T) & g^{(1)}(T_0) = 0 \\
\psi_2^m - \psi_1^m = g^{(2)}(T, K_v) & \forall T,\ g^{(2)}(T, 1) = 0 \\
\psi_3^m - \psi_2^m = g^{(3)}(T, K_v, \gamma_{lim}) & \forall T \forall K_v,\ g^{(3)}(T, K_v, 0) = 0 \quad \text{(si } \gamma_{lim} = 0\text{, plastif. immédiate)} \\
\psi_4^m - \psi_3^m = g^{(4)}(T, K_v, p) & \forall T \forall K_v,\ g^{(4)}(T, K_v, 0) = 0 \\
\psi^m - \psi_4^m = g^{(5)}(T, K_v, \gamma, p) & \forall T \forall K_v \forall p,\ g^{(5)}(T, K_v, \gamma_{lim} + p, p) = 0 \quad \text{(si } \gamma = \gamma_{lim} + p \text{ : frontière)}
\end{array}$$



Construction d'une énergie libre (1/4)

Variables d'état : $\{T, K_v, \gamma, p\}$ (plasticité d'un solide déformable isotrope)

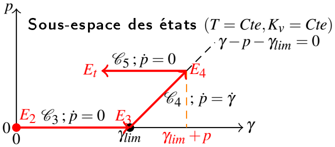
Loi d'évolution : $\dot{p} = \mathscr{H}(\gamma - p - \gamma_{lim})\,\langle\dot{\gamma}\rangle$ (états admissibles : $\gamma - p - \gamma_{lim} \leq 0$)

Un chemin pour aller à un état admissible quelconque :

$$\underbrace{E_0 = (T_0, 1, 0, 0)}_{\text{état de réf.}} \xrightarrow{\mathscr{C}^{(1)}} E_1 = (T, 1, 0, 0) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(2)}} E_2 = (T, K_v, 0, 0) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(3)}}$$

$$E_3 = (T, K_v, \gamma_{lim}, 0) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(4)}} E_4 = (T, K_v, \gamma_{lim} + p, p) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(5)}} \underbrace{E_t = (T, K_v, \gamma, p)}_{\text{état final}}$$

$$\begin{array}{lll}
\psi^m_1 - \psi^m_0 = g^{(1)}(T) & g^{(1)}(T_0) = 0 & \\
\psi^m_2 - \psi^m_1 = g^{(2)}(T, K_v) & \forall T,\ g^{(2)}(T, 1) = 0 & \\
\psi^m_3 - \psi^m_2 = g^{(3)}(T, K_v, \gamma_{lim}) & \forall T \forall K_v,\ g^{(3)}(T, K_v, 0) = 0 & (\text{si } \gamma_{lim} = 0, \text{ plastif. immédiate}) \\
\psi^m_4 - \psi^m_3 = g^{(4)}(T, K_v, p) & \forall T \forall K_v,\ g^{(4)}(T, K_v, 0) = 0 & \\
\psi^m - \psi^m_4 = g^{(5)}(T, K_v, \gamma, p) & \forall T \forall K_v \forall p,\ g^{(5)}(T, K_v, \gamma_{lim} + p, p) = 0 & (\text{si } \gamma = \gamma_{lim} + p \text{ : frontière})
\end{array}$$



Construction d'une énergie libre (1/4)

Variables d'état : $\{T, K_v, \gamma, p\}$ (plasticité d'un solide déformable isotrope)

Loi d'évolution : $\dot{p} = \mathscr{H}(\gamma - p - \gamma_{lim}) \langle \dot{\gamma} \rangle$ (états admissibles : $\gamma - p - \gamma_{lim} \leq 0$)

Un chemin pour aller à un état admissible quelconque :

$$\underbrace{E_0 = (T_0, 1, 0, 0)}_{\text{état de réf.}} \xrightarrow{\mathscr{C}^{(1)}} E_1 = (T, 1, 0, 0) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(2)}} E_2 = (T, K_v, 0, 0) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(3)}}$$

$$E_3 = (T, K_v, \gamma_{lim}, 0) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(4)}} E_4 = (T, K_v, \gamma_{lim} + p, p) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(5)}} \underbrace{E_t = (T, K_v, \gamma, p)}_{\text{état final}}$$

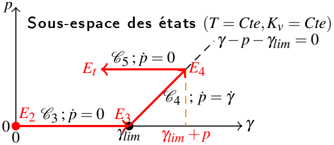
$\psi_1^m - \psi_0^m = g^{(1)}(T)$ $\qquad g^{(1)}(T_0) = 0$

$\psi_2^m - \psi_1^m = g^{(2)}(T, K_v)$ $\qquad \forall T,\ g^{(2)}(T, 1) = 0$

$\psi_3^m - \psi_2^m = g^{(3)}(T, K_v, \gamma_{lim})$ $\qquad \forall T \forall K_v,\ g^{(3)}(T, K_v, 0) = 0$ (si $\gamma_{lim} = 0$, plastif. immédiate)

$\psi_4^m - \psi_3^m = g^{(4)}(T, K_v, p)$ $\qquad \forall T \forall K_v,\ g^{(4)}(T, K_v, 0) = 0$

$\psi^m - \psi_4^m = g^{(5)}(T, K_v, \gamma, p)$ $\qquad \forall T \forall K_v \forall p,\ g^{(5)}(T, K_v, \gamma_{lim} + p, p) = 0$ (si $\gamma = \gamma_{lim} + p$: frontière)



Construction d'une énergie libre (1/4)

Variables d'état : $\{T, K_v, \gamma, p\}$ (plasticité d'un solide déformable isotrope)

Loi d'évolution : $\dot{p} = \mathscr{H}(\gamma - p - \gamma_{lim})\,\langle\dot{\gamma}\rangle$ (états admissibles : $\gamma - p - \gamma_{lim} \leq 0$)

Un chemin pour aller à un état admissible quelconque :

$$\underbrace{E_0 = (T_0, 1, 0, 0)}_{\text{état de réf.}} \xrightarrow{\mathscr{C}^{(1)}} E_1 = (T, 1, 0, 0) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(2)}} E_2 = (T, K_v, 0, 0) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(3)}}$$

$$E_3 = (T, K_v, \gamma_{lim}, 0) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(4)}} E_4 = (T, K_v, \gamma_{lim}+p, p) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(5)}} \underbrace{E_t = (T, K_v, \gamma, p)}_{\text{état final}}$$

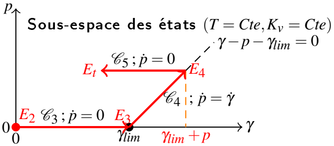
$$\psi_1^m - \psi_0^m = g^{(1)}(T) \qquad g^{(1)}(T_0) = 0$$

$$\psi_2^m - \psi_1^m = g^{(2)}(T, K_v) \qquad \forall T,\ g^{(2)}(T, 1) = 0$$

$$\psi_3^m - \psi_2^m = g^{(3)}(T, K_v, \gamma_{lim}) \qquad \forall T \forall K_v,\ g^{(3)}(T, K_v, 0) = 0$$ (si $\gamma_{lim} = 0$, plastif. immédiate)

$$\psi_4^m - \psi_3^m = g^{(4)}(T, K_v, p) \qquad \forall T \forall K_v,\ g^{(4)}(T, K_v, 0) = 0$$

$$\psi^m - \psi_4^m = g^{(5)}(T, K_v, \gamma, p) \qquad \forall T \forall K_v \forall p,\ g^{(5)}(T, K_v, \gamma_{lim}+p, p) = 0$$ (si $\gamma = \gamma_{lim} + p$: frontière)



Construction d'une énergie libre (1/4)

Variables d'état : $\{T, K_v, \gamma, p\}$ (plasticité d'un solide déformable isotrope)

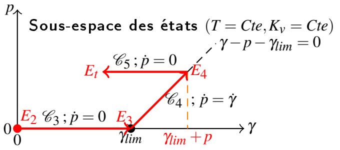
Loi d'évolution : $\dot{p} = \mathscr{H}(\gamma - p - \gamma_{lim}) \langle\dot{\gamma}\rangle$ (états admissibles : $\gamma - p - \gamma_{lim} \leq 0$)

Un chemin pour aller à un état admissible quelconque :

$$\underbrace{E_0 = (T_0, 1, 0, 0)}_{\text{état de réf.}} \xrightarrow{\mathscr{C}^{(1)}} E_1 = (T, 1, 0, 0) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(2)}} E_2 = (T, K_v, 0, 0) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(3)}}$$

$$E_3 = (T, K_v, \gamma_{lim}, 0) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(4)}} E_4 = (T, K_v, \gamma_{lim} + p, p) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(5)}} \underbrace{E_t = (T, K_v, \gamma, p)}_{\text{état final}}$$

$$\begin{array}{ll}
\psi_1^m - \psi_0^m = g^{(1)}(T) & g^{(1)}(T_0) = 0 \\
\psi_2^m - \psi_1^m = g^{(2)}(T, K_v) & \forall T,\ g^{(2)}(T, 1) = 0 \\
\psi_3^m - \psi_2^m = g^{(3)}(T, K_v, \gamma_{lim}) & \forall T \forall K_v,\ g^{(3)}(T, K_v, 0) = 0 \quad (\text{si } \gamma_{lim} = 0, \text{ plastif. immédiate}) \\
\psi_4^m - \psi_3^m = g^{(4)}(T, K_v, p) & \forall T \forall K_v,\ g^{(4)}(T, K_v, 0) = 0 \\
\psi^m - \psi_4^m = g^{(5)}(T, K_v, \gamma, p) & \forall T \forall K_v \forall p,\ g^{(5)}(T, K_v, \gamma_{lim} + p, p) = 0 \quad (\text{si } \gamma = \gamma_{lim} + p \text{ : frontière})
\end{array}$$



Construction d'une énergie libre (1/4)

Variables d'état : $\{T, K_v, \gamma, p\}$ (plasticité d'un solide déformable isotrope)

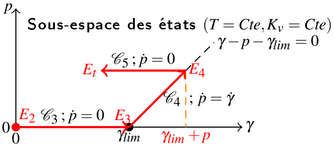
Loi d'évolution : $\dot{p} = \mathscr{H}(\gamma - p - \gamma_{lim})\,\langle\dot{\gamma}\rangle$ (états admissibles : $\gamma - p - \gamma_{lim} \leq 0$)

Un chemin pour aller à un état admissible quelconque :

$$\underbrace{E_0 = (T_0, 1, 0, 0)}_{\text{état de réf.}} \xrightarrow{\mathscr{C}^{(1)}} E_1 = (T, 1, 0, 0) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(2)}} E_2 = (T, K_v, 0, 0) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(3)}}$$

$$E_3 = (T, K_v, \gamma_{lim}, 0) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(4)}} E_4 = (T, K_v, \gamma_{lim} + p, p) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(5)}} \underbrace{E_t = (T, K_v, \gamma, p)}_{\text{état final}}$$

$$\begin{array}{lll}
\psi_1^m - \psi_0^m = g^{(1)}(T) & g^{(1)}(T_0) = 0 & \\
\psi_2^m - \psi_1^m = g^{(2)}(T, K_v) & \forall T,\ g^{(2)}(T, 1) = 0 & \\
\psi_3^m - \psi_2^m = g^{(3)}(T, K_v, \gamma_{lim}) & \forall T \forall K_v,\ g^{(3)}(T, K_v, 0) = 0 & (\text{si } \gamma_{lim} = 0, \text{ plastif. immédiate}) \\
\psi_4^m - \psi_3^m = g^{(4)}(T, K_v, p) & \forall T \forall K_v,\ g^{(4)}(T, K_v, 0) = 0 & \\
\psi^m - \psi_4^m = g^{(5)}(T, K_v, \gamma, p) & \forall T \forall K_v \forall p,\ g^{(5)}(T, K_v, \gamma_{lim} + p, p) = 0 & (\text{si } \gamma = \gamma_{lim} + p \text{ : frontière})
\end{array}$$



Construction d'une énergie libre (1/4)

Variables d'état : $\{T, K_v, \gamma, p\}$ (plasticité d'un solide déformable isotrope)

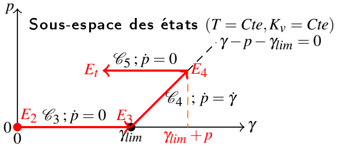
Loi d'évolution : $\dot{p} = \mathscr{H}(\gamma - p - \gamma_{lim})\langle\dot{\gamma}\rangle$ (états admissibles : $\gamma - p - \gamma_{lim} \leq 0$)

Un chemin pour aller à un état admissible quelconque :

$$\underbrace{E_0 = (T_0, 1, 0, 0)}_{\text{état de réf.}} \xrightarrow{\mathscr{C}^{(1)}} E_1 = (T, 1, 0, 0) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(2)}} E_2 = (T, K_v, 0, 0) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(3)}}$$

$$E_3 = (T, K_v, \gamma_{lim}, 0) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(4)}} E_4 = (T, K_v, \gamma_{lim} + p, p) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(5)}} \underbrace{E_t = (T, K_v, \gamma, p)}_{\text{état final}}$$

$$\begin{aligned}
&\psi_1^m - \psi_0^m = g^{(1)}(T) && g^{(1)}(T_0) = 0 \\
&\psi_2^m - \psi_1^m = g^{(2)}(T, K_v) && \forall T,\ g^{(2)}(T, 1) = 0 \\
&\psi_3^m - \psi_2^m = g^{(3)}(T, K_v, \gamma_{lim}) && \forall T \forall K_v,\ g^{(3)}(T, K_v, 0) = 0 \quad \text{(si } \gamma_{lim} = 0\text{, plastif. immédiate)} \\
&\psi_4^m - \psi_3^m = g^{(4)}(T, K_v, p) && \forall T \forall K_v,\ g^{(4)}(T, K_v, 0) = 0 \\
&\psi^m - \psi_4^m = g^{(5)}(T, K_v, \gamma, p) && \forall T \forall K_v \forall p,\ g^{(5)}(T, K_v, \gamma_{lim} + p, p) = 0 \quad \text{(si } \gamma = \gamma_{lim} + p \text{ : frontière)}
\end{aligned}$$



Construction d'une énergie libre (1/4)

Variables d'état : $\{T, K_v, \gamma, p\}$ (plasticité d'un solide déformable isotrope)

Loi d'évolution : $\dot{p} = \mathscr{H}(\gamma - p - \gamma_{lim}) \langle \dot{\gamma} \rangle$ (états admissibles : $\gamma - p - \gamma_{lim} \leq 0$)

Un chemin pour aller à un état admissible quelconque :

$$\underbrace{E_0 = (T_0, 1, 0, 0)}_{\text{état de réf.}} \xrightarrow{\mathscr{C}^{(1)}} E_1 = (T, 1, 0, 0) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(2)}} E_2 = (T, K_v, 0, 0) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(3)}}$$

$$E_3 = (T, K_v, \gamma_{lim}, 0) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(4)}} E_4 = (T, K_v, \gamma_{lim} + p, p) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(5)}} \underbrace{E_t = (T, K_v, \gamma, p)}_{\text{état final}}$$

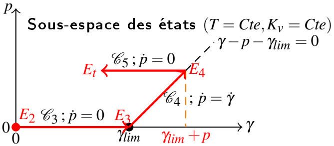
$$\psi_1^m - \psi_0^m = g^{(1)}(T) \qquad g^{(1)}(T_0) = 0$$

$$\psi_2^m - \psi_1^m = g^{(2)}(T, K_v) \qquad \forall T,\ g^{(2)}(T, 1) = 0$$

$$\psi_3^m - \psi_2^m = g^{(3)}(T, K_v, \gamma_{lim}) \qquad \forall T \forall K_v,\ g^{(3)}(T, K_v, 0) = 0 \quad \text{(si } \gamma_{lim} = 0 \text{, plastif. immédiate)}$$

$$\psi_4^m - \psi_3^m = g^{(4)}(T, K_v, p) \qquad \forall T \forall K_v,\ g^{(4)}(T, K_v, 0) = 0$$

$$\psi^m - \psi_4^m = g^{(5)}(T, K_v, \gamma, p) \qquad \forall T \forall K_v \forall p,\ g^{(5)}(T, K_v, \gamma_{lim} + p, p) = 0 \quad \text{(si } \gamma = \gamma_{lim} + p \text{ : frontière)}$$



Construction d'une énergie libre (1/4)

Variables d'état : $\{T, K_v, \gamma, p\}$ (plasticité d'un solide déformable isotrope)

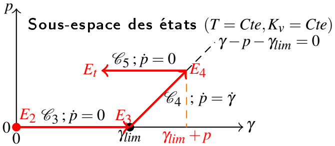
Loi d'évolution : $\dot{p} = \mathscr{H}(\gamma - p - \gamma_{lim})\,\langle\dot{\gamma}\rangle$ (états admissibles : $\gamma - p - \gamma_{lim} \leq 0$)

Un chemin pour aller à un état admissible quelconque :

$$\underbrace{E_0 = (T_0, 1, 0, 0)}_{\text{état de réf.}} \xrightarrow{\mathscr{C}^{(1)}} E_1 = (T, 1, 0, 0) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(2)}} E_2 = (T, K_v, 0, 0) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(3)}}$$

$$E_3 = (T, K_v, \gamma_{lim}, 0) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(4)}} E_4 = (T, K_v, \gamma_{lim} + p, p) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(5)}} \underbrace{E_t = (T, K_v, \gamma, p)}_{\text{état final}}$$

$$\begin{array}{ll}
\psi_1^m - \psi_0^m = g^{(1)}(T) & g^{(1)}(T_0) = 0 \\
\psi_2^m - \psi_1^m = g^{(2)}(T, K_v) & \forall T,\ g^{(2)}(T, 1) = 0 \\
\psi_3^m - \psi_2^m = g^{(3)}(T, K_v, \gamma_{lim}) & \forall T \forall K_v,\ g^{(3)}(T, K_v, 0) = 0 \quad \text{(si } \gamma_{lim} = 0\text{, plastif. immédiate)} \\
\psi_4^m - \psi_3^m = g^{(4)}(T, K_v, p) & \forall T \forall K_v,\ g^{(4)}(T, K_v, 0) = 0 \\
\psi^m - \psi_4^m = g^{(5)}(T, K_v, \gamma, p) & \forall T \forall K_v \forall p,\ g^{(5)}(T, K_v, \gamma_{lim} + p, p) = 0 \quad \text{(si } \gamma = \gamma_{lim} + p \text{ : frontière)}
\end{array}$$



Construction d'une énergie libre (1/4)

Variables d'état : $\{T, K_v, \gamma, p\}$ (plasticité d'un solide déformable isotrope)

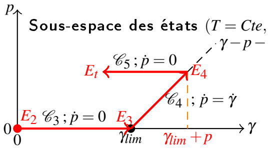
Loi d'évolution : $\dot{p} = \mathscr{H}(\gamma - p - \gamma_{lim})\,\langle\dot{\gamma}\rangle$ (états admissibles : $\gamma - p - \gamma_{lim} \leq 0$)

Un chemin pour aller à un état admissible quelconque :

$$\underbrace{E_0 = (T_0,1,0,0)}_{\text{état de réf.}} \xrightarrow{\mathscr{C}^{(1)}} E_1 = (T,1,0,0) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(2)}} E_2 = (T,K_v,0,0) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(3)}}$$

$$E_3 = (T,K_v,\gamma_{lim},0) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(4)}} E_4 = (T,K_v,\gamma_{lim}+p,p) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(5)}} \underbrace{E_t = (T,K_v,\gamma,p)}_{\text{état final}}$$

$$\begin{array}{ll}
\psi_1^m - \psi_0^m = g^{(1)}(T) & g^{(1)}(T_0) = 0 \\
\psi_2^m - \psi_1^m = g^{(2)}(T,K_v) & \forall T,\ g^{(2)}(T,1) = 0 \\
\psi_3^m - \psi_2^m = g^{(3)}(T,K_v,\gamma_{lim}) & \forall T \forall K_v,\ g^{(3)}(T,K_v,0) = 0 \quad \text{(si } \gamma_{lim} = 0\text{, plastif. immédiate)} \\
\psi_4^m - \psi_3^m = g^{(4)}(T,K_v,p) & \forall T \forall K_v,\ g^{(4)}(T,K_v,0) = 0 \\
\psi^m - \psi_4^m = g^{(5)}(T,K_v,\gamma,p) & \forall T \forall K_v \forall p,\ g^{(5)}(T,K_v,\gamma_{lim}+p,p) = 0 \quad \text{(si } \gamma = \gamma_{lim}+p \text{ : frontière)}
\end{array}$$



Construction d'une énergie libre (2/4)

Fonctions d'état :

$$\bar{f}_\psi = g^{(1)}(T) + g^{(2)}(T,K_v) + g^{(3)}(T,K_v,\gamma_{lim}) + g^{(4)}(T,K_v,\gamma_{lim}+p,p) + g^{(5)}(T,K_v,\gamma,p)$$

$$\bar{f}_s = -\partial_T \bar{f}_\psi \;\;;\;\; \bar{f}_e = \bar{f}_\psi + T\bar{f}_s \;\;;\;\; \boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref} = \frac{\rho_0}{K_v}\left(\partial_{K_v}\bar{f}_\psi\, \boldsymbol{S}_{K_v} + \partial_\gamma \bar{f}_\psi\, \boldsymbol{S}_\gamma\right)$$

(fonctions des $g^{(\bullet)}$)

Équations différentielles déterminant les $g^{(\bullet)}$: (avec $D=0$)

$\mathscr{C}^{(1)}$: $Q^{(1)}_{exp}(T) = \bar{f}_e(T,1,0,0)$ (conservation de l'énergie, J.kg^{-1})

$\mathscr{C}^{(2)}$: $\sigma^{(2)}_{exp}(T,K_v) = \left[\frac{1}{3}\,\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref}\right]_{(\gamma=0\,,p=0)}$ (contrainte moyenne)

$\mathscr{C}^{(3)}$: $\tau^{(3)}_{exp}(T,K_v,\gamma_{lim}) = \left[\boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref}{}^{1}{}_{2}\right]_{(\gamma=\gamma_{lim}\,,p=0)}$ (glissement dans le plan $(1,2)$, $\gamma : 0 \rightarrow \gamma_{lim}$)

$\mathscr{C}^{(4)}$: $\tau^{(4)}_{exp}(T,K_v,p) = \left[\boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref}{}^{1}{}_{2}\right]_{(\gamma=\gamma_{lim}+p)}$ (glissement dans le plan $(1,2)$, $\gamma = \gamma_{lim}+p$)

$\mathscr{C}^{(5)}$: $\tau^{(5)}_{exp}(T,K_v,\gamma,p) = \boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref}{}^{1}{}_{2}$ (glissement dans le plan $(1,2)$, $\gamma < \gamma_{lim}+p$)

$\bar{f}_\psi$: $\left[\partial_p \bar{f}_\psi\right]_{(\gamma=\gamma_{lim}+p)} = 0$ (continuité de $\boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref}$)

Solution : on trouve les $g^{(\bullet)}$ en fonction des expériences.

On en déduit $\bar{f}_\psi$ puis $\bar{f}_s$, $\bar{f}_e$ et $\boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref}$. (pdf, section 5.4)

On trouve aussi des relations nécessaires entre les mesures :

$$\tau^{(3)}_{exp}(T,K_v,\gamma) = \tau^{(5)}_{exp}(T,K_v,\gamma,0) \quad \text{et} \quad \tau^{(4)}_{exp}(T,K_v,p) = \tau^{(5)}_{exp}(T,K_v,p+\gamma_{lim},p)$$

Construction d'une énergie libre (3/4)

Une idéalisation de $\tau_{exp}^{(5)}$: (détails dans la section 5.6 du pdf)

Construction d'une énergie libre (4/4)

Résumé de la démarche de construction de $\bar{f}_\psi$:

1. Construire un chemin conduisant à un état admissible quelconque.
2. L'énergie libre massique de Helmholtz de l'état final est la somme de ses variations dans chaque chemin élémentaire : $\bar{f}_\psi = \sum g^{(\bullet)}$.

   Les autres fonctions d'état $\bar{f}_s$, $\bar{f}_e$ et $\boldsymbol{\sigma}_{ref}^{(p)}$ s'en déduisent.
3. Pour chaque chemin élémentaire, écrire l'équation qui le régit en fonction de mesures $Z_{exp}^{(\bullet)}$ (chaleur ou contraintes), dans des expériences idéales (vitesses nulles, champs uniformes, pesanteur négligeable).

   Les expériences idéales peuvent être approchées par des expériences réelles, ou idéalisées par des expressions physiquement sensées.
4. On obtient l'expression de $\bar{f}_\psi$ en fonction des expériences $Z_{exp}^{(\bullet)}$ et on en déduit les autres fonctions d'état $\bar{f}_s$, $\bar{f}_e$ et $\boldsymbol{\sigma}_{ref}^{(p)}$.
5. Les contraintes dissipatives $\boldsymbol{\sigma}_d$ sont déterminées par des expériences à vitesse de déformation contrôlée : $\boldsymbol{\sigma}_d = \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_{ref}^{(p)}$.

Variantes possibles

- Variables d'état cinématiques plus complètes :
  déformation à 3 invariants, anisotropies...
- La limite élastique dépend de la température :
  $\gamma_{lim}(T)$ ou $\delta_{lim}(T)$; le modèle est un peu plus compliqué car la relation de Helmholtz est modifiée. (exercice)
- Plastification immédiate : on pose $\delta_{lim} = 1 \Leftrightarrow \gamma_{lim} = 0$.
  Modélisation de matériaux comme la plasticine.
- Autre expression du critère de limite élastique :
  $$\delta \leq \delta_{lim} \quad \Leftrightarrow \quad h(\delta) \leq h(\delta_{lim}) \qquad \text{avec } \forall x \geqslant 1,\ h'(x) > 0$$
  La fonction h permet de moduler la loi d'évolution. (exercice)
- Autre critère de déclenchement de la plastification :
  exemple : limitation de la distorsion angulaire, $\delta^a \leq \delta^a_{lim}$
- Autre mode de mémorisation du chemin suivi :
  $$p \neq \sup_{\tau \in [t_0\,;t]} \langle h(\delta) - h(\delta_{lim}) \rangle$$
- Idéalisation différente des expériences.

Essai de traction isotherme (étude analytique)

Si on note $\boldsymbol{e}_1$ la direction de traction :

$$[\boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref}{}^{\bullet}{}_{\bullet}]_{(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)} = \begin{bmatrix} \sigma^1{}_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad [\boldsymbol{B}^{\bullet}{}_{\bullet}]_{(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)} = \begin{bmatrix} {\lambda_1}^2 & 0 & 0 \\ 0 & {\lambda_2}^2 & 0 \\ 0 & 0 & {\lambda_2}^2 \end{bmatrix}$$

Les valeurs des variables d'état cinématiques sont :

$$K_v = \lambda_1\,{\lambda_2}^2 \quad ; \quad \gamma = \sqrt{3}\,\sqrt{\delta^{2/3} - 1} = \sqrt{\frac{{\lambda_1}^2 + 2\,{\lambda_2}^2}{{\lambda_1}^{2/3}\,{\lambda_2}^{4/3}} - 3}$$

Avec le modèle (T, K_v, γ, p) idéalisé précédent :

$$\sigma^1{}_1 = f_1(T, \lambda_1, \lambda_2, p) \quad ; \quad 0 = f_2(T, \lambda_1, \lambda_2, p)$$

où f_1 et f_2 sont des fonctions compliquées. (voir pdf, fin de l'annexe D)

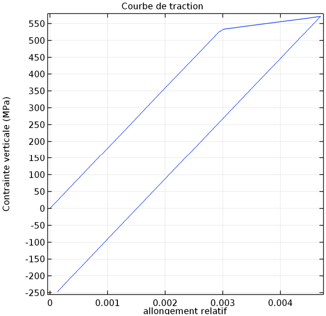
> Il n'est pas possible d'éliminer λ_2 pour obtenir l'expression analytique de la « courbe de traction » $\sigma^1{}_1 = g(T, \lambda_1, p)$!

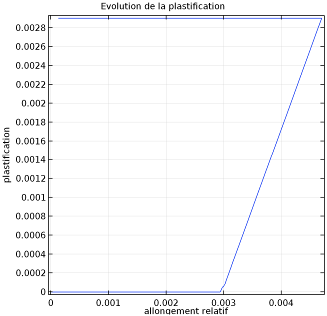
Mais on peut faire une simulation numérique...

Simulation numérique d'une traction.

- Logiciel : `Comsol`® (sans physique déclarée)
- Matériau : un acier ordinaire ($\gamma_{lim} = 4 10^{-3}$, autres données dans le pdf)
- Sollicitation : déplacement imposé de 0% à $0{,}5\%$ puis retour à 0%.

  (isotherme, pas de viscosité, conditions aux limites habituelles en traction)
- Résultats : (on trouve que tous les champs sont uniformes dans l'éprouvette)

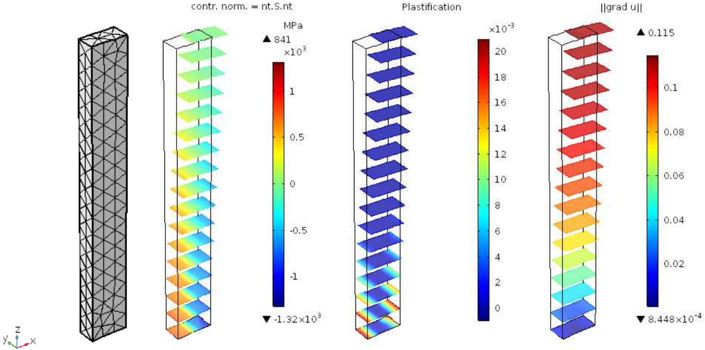




L'apparente linéarité des courbes est due aux allongements relatifs très petits ($\leq 0{,}5\%$).

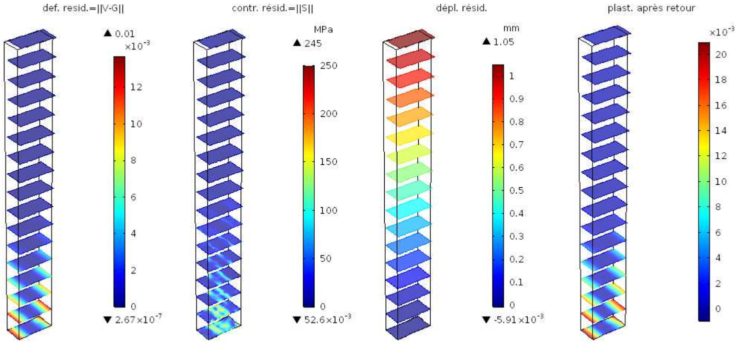
Simulation numérique d'une flexion (1/2)

- Matériau : identique au précédent ; éprouvette : $10 \times 10 \times 160$ mm.
- Sollicitation : flexion trois points ;
  plans de symétrie : $z = 0$ et $y = 0$;
  appui fixe : $z = 0, x = 10$; appui mobile : $x = 0, z = 80$;
  déplacement imposé suivant x : $u_{1\,max} = 5$ mm.
- Résultats : (au déplacement maximal)



Simulation numérique d'une flexion (2/2)

- Résultats : (après le retour « élastique »)



Résumé du modèle de plasticité

Les caractéristiques principales du modèle de plasticité qui a été développé sont :

- Seuil de plastification : $\delta \leq \delta_{lim} \Leftrightarrow \gamma \leq \gamma_{lim}$ (critère de « limite élastique »)
- Une seule variable d'état mnésique : $p = \sup_{\tau \in [t_0\,;t]} \langle \gamma - \gamma_{lim} \rangle$
- Variables d'état (solide isotrope) : $\{T, K_v, \gamma, p\}$
- Il existe un espace des états admissibles : $\gamma \leq \gamma_{lim} + p$
- Comportement mécanique : $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref} + \boldsymbol{\sigma}_d$
- La contrainte de référence est déterminée par l'énergie libre de Helmholtz : $\boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref} = \frac{\rho_0}{K_v}(\partial_{K_v}\bar{f}_\psi \boldsymbol{S}_{K_v} + \partial_\gamma \bar{f}_\psi \boldsymbol{S}_\gamma)$.
  Elle est identifiable par des mesures statiques de chaleur, de contrainte en déformation sphérique et en glissement.
- La contrainte dissipative $\boldsymbol{\sigma}_d$ est telle que $\forall \boldsymbol{D},\ \Phi_{int} = \boldsymbol{\sigma}_d : \boldsymbol{D} \geqslant 0$.
- Bien que des essais de traction et de flexion n'aient pas servi à l'identification de l'énergie libre, leur simulation numérique exhibe des comportements mécaniques raisonnables.

Cinquième partie

Modèles d'endommagement

Endommagement

Objectif microscopique :

Se protéger des ruptures de liaisons interatomiques.

(« affaiblissement » du matériau)

Deux idées macroscopiques :

1. Limitation de la dilatation volumique :
   on suppose qu'à partir d'une certaine dilatation volumique, il se produit des bulles de cavitation.
2. Limitation des élongations :
   on suppose qu'à partir d'une certaine dilatation linéique, il se produit une rupture de liaison.

La dilatation volumique et la dilatation linéique sont des grandeurs issues de la déformation macroscopique, qui tentent de refléter l'éloignement des corpuscules microscopiques.

Endommagement par cavitation (1/3)

Choix d'un critère macroscopique :

$K_v \leq K_{v\,lim}$ ($K_{v\,lim}$: caractéristique du matériau)

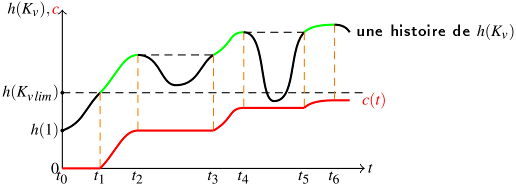
Choix d'une variable d'état mnésique :

$$c(t) = \sup_{\tau\in[t_0\,;t]} \langle h(K_v) - h(K_{v\,lim}) \rangle \quad \text{où } \forall x>0, \quad h'(x)>0.$$

Hypothèse simplificatrice :

$K_{v\,lim}$ ne varie pas avec la température.

Évolution de la variable mnésique c :



Endommagement par cavitation (2/3)

Propriétés :

(mêmes démonstrations qu'en plasticité)

- La variable d'état mnésique c est scalaire, objective et non négative.
- L'espace des états admissibles est défini par l'inégalité :
  $$h(K_v) \leq h(K_{v\,lim}) + c.$$
- La variable d'état mnésique c ne peut pas diminuer :
  $$\dot{c} \geqslant 0.$$

Loi d'évolution :

$$\dot{c} = \mathscr{H}\big(h(K_v) - h(K_{v\,lim}) - c\big)\, h'(K_v)\, \underbrace{K_v\langle \boldsymbol{G} : \boldsymbol{D}\rangle}_{\langle \dot{K}_v\rangle} \qquad \left(\frac{\dot{K}_v}{K_v} = \mathrm{tr}\boldsymbol{D}\right)$$

- La variable mnésique c n'évolue que dans des chemins sur la frontière des états admissibles et quand $\mathrm{tr}\boldsymbol{D} > 0$.
- Le choix de la fonction h permet de moduler la loi d'évolution.

Endommagement par cavitation (3/3)

Dissipation intrinsèque : $\forall \dot{T}\ \forall \boldsymbol{D},\ \Phi_{int} \geqslant 0$

$$-\rho\,(\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s)\,\dot{T} + (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^{(c)}_{ref}) : \boldsymbol{D} - \rho\,\partial_c \bar{f}_\psi\,\dot{c} \geqslant 0$$

$$-\rho\,(\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s)\,\dot{T} + \underbrace{(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^{(c)}_{ref}) : \boldsymbol{D} - \rho\,\partial_c \bar{f}_\psi\,\mathscr{H}\big(h(K_v) - h(K_{v\,lim}) - c\big)\,h'(K_v)\,K_v \langle \boldsymbol{G} : \boldsymbol{D} \rangle}_{\text{n'est pas fonction de } \dot{T}} \geqslant 0$$

Relation de Helmholtz : $\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s = 0$

Comportement mécanique :

- En évolution cavitante : $(\dot{c} > 0 \Leftrightarrow \mathscr{H}\big(h(K_v) - h(K_{v\,lim}) - c\big) = 1$ et $\boldsymbol{G} : \boldsymbol{D} > 0)$

  $\forall \boldsymbol{D},\ \big(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^{(c)}_{ref} - \rho\,\partial_c \bar{f}_\psi\,h'(K_v)\,K_v\,\boldsymbol{G}\big) : \boldsymbol{D} \geqslant 0$

  $\exists \boldsymbol{g} \mid \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^{(c)}_{ref} + \rho\,\partial_c \bar{f}_\psi\,h'(K_v)\,K_v\,\boldsymbol{G} + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{D}, \cdots)$ où $\forall \boldsymbol{D},\ \boldsymbol{g}(\boldsymbol{D}, \cdots) : \boldsymbol{D} \geqslant 0$

- En évolution non cavitante : $(\dot{c} = 0 \Leftrightarrow \mathscr{H}\big(h(K_v) - h(K_{v\,lim}) - c\big) = 0$ ou $\boldsymbol{G} : \boldsymbol{D} < 0)$

  $\forall \boldsymbol{D},\ (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^{(c)}_{ref}) : \boldsymbol{D} \geqslant 0$

  $\exists \boldsymbol{f} \mid \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^{(c)}_{ref} + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{D}, \cdots)$ où $\forall \boldsymbol{D},\ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{D}, \cdots) : \boldsymbol{D} \geqslant 0$

- Continuité des contraintes sur la frontière : $(h(K_v) + c = h(K_{v\,lim}))$

  $\big[\partial_c \bar{f}_\psi\big]_{(h(K_v)+c=h(K_{v\,lim}))} = 0$ et $\big[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{D}, \cdots)\big]_{(h(K_v)+c=h(K_{v\,lim}))} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{D}, \cdots)$

- Finalement : $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^{(c)}_{ref} + \boldsymbol{\sigma}_d$ où $\forall \boldsymbol{D},\ \boldsymbol{\sigma}_d(\boldsymbol{D}, \cdots) : \boldsymbol{D} \geqslant 0$

  (la contrainte dissipative $\boldsymbol{\sigma}_d$ peut être choisie nulle)

Endommagement par élongation (1/3)

Choix d'un critère macroscopique :

$\lambda_1 \leq \lambda_{lim}$ où λ_1 est la plus grande dilatation linéique en la particule.

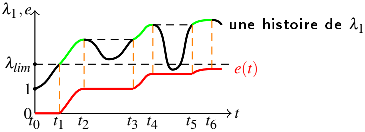
Choix d'une variable d'état mnésique :

$$e(t) = \sup_{\tau \in [t_0\,;t]} \langle \lambda_1(\tau) - \lambda_{lim} \rangle$$ (le plus grand dépassement de λ_{lim} depuis t_0)

Hypothèse simplificatrice : λ_{lim} indépendant de T.

Propriétés de la variable d'état mnésique $e(t)$:

- $e(t)$ est une grandeur scalaire, objective, et non négative ;
- Il y a un espace des états admissibles : $\lambda_1(t) \leq \lambda_{lim} + e(t)$
- L'endommagement $e(t)$ ne peut pas diminuer : $\dot{e} \geqslant 0$



Endommagement par élongation (2/3)

Rappel d'algèbre tensorielle :

λ_1 est une fonction des variables d'état cinématiques :

$$\lambda_1{}^2 = \frac{2J}{3}\cos\frac{\varphi}{3} + \frac{B_{\mathrm{I}}}{3}$$

où : $J = \sqrt{B_{\mathrm{I}}{}^2 - 3\,B_{\mathrm{II}}}$ et $\varphi = \mathrm{Arccos}\,\frac{27\,B_{\mathrm{III}} - 9\,B_{\mathrm{I}}\,B_{\mathrm{II}} + 2\,B_{\mathrm{I}}{}^3}{2\,J^3} \in [0\,;\pi]$

Une approximation simplificatrice :

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \leq \cos\frac{\varphi}{3} \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\sqrt{3}}{3}\,J + \frac{B_{\mathrm{I}}}{3} \leq \lambda_1{}^2 \leq \frac{2}{3}\,J + \frac{B_{\mathrm{I}}}{3}$$

$$0.577\,J + \frac{B_{\mathrm{I}}}{3} \leq \lambda_1{}^2 \leq 0.667\,J + \frac{B_{\mathrm{I}}}{3}$$

$$\lambda_1{}^2 \simeq 0.622\,\sqrt{B_{\mathrm{I}}{}^2 - 3\,B_{\mathrm{II}}} + \frac{B_{\mathrm{I}}}{3}$$

(on peut aussi prendre $\lambda_1{}^2 \simeq \frac{2}{3}\,\sqrt{B_{\mathrm{I}}{}^2 - 3\,B_{\mathrm{II}}} + \frac{B_{\mathrm{I}}}{3}$)

Loi d'évolution :

$$\dot{e} = \begin{cases} \langle \dot{\lambda}_1 \rangle & \text{si } \lambda_1 - e = \lambda_{lim} \\ 0 & \text{si } \lambda_1 - e < \lambda_{lim} \end{cases}$$

(état actuel sur la frontière des états admissibles)

(état actuel à l'intérieur des états admissibles)

avec $$\dot{\lambda}_1 \simeq \underbrace{\frac{1}{2\lambda_1}\left(\frac{1}{3} + \frac{0.622\,B_{\mathrm{I}}}{\sqrt{B_{\mathrm{I}}{}^2 - 3\,B_{\mathrm{II}}}}\right)}_{K_1} \dot{B}_{\mathrm{I}} - \underbrace{\frac{3}{4\,\lambda_1}\,\frac{0.622}{\sqrt{B_{\mathrm{I}}{}^2 - 3\,B_{\mathrm{II}}}}}_{K_2} \dot{B}_{\mathrm{II}}$$

Remarque : Dans ce modèle d'endommagement, l'invariant B_{II} intervient nécessairement dans les variables d'état cinématiques.

Endommagement par élongation (3/3)

L'inégalité $\forall \dot{T}\, \forall \boldsymbol{D},\ \Phi_{int} \geqslant 0$ implique : (raisonnement habituel)

Relation de Helmholtz :

$$\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s = 0$$

Comportement mécanique :

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^{(e)}_{ref} + \boldsymbol{\sigma}_d$$

où : $\boldsymbol{\sigma}^{(e)}_{ref} = \frac{\rho_0}{K_v} \sum_{j=1}^{m} \partial_{I_j} \bar{f}_\psi \boldsymbol{S}_j$ et $\forall \boldsymbol{D},\ \boldsymbol{\sigma}_d : \boldsymbol{D} \geqslant 0$

Continuité des contraintes à la frontière :

$\left[\partial_e \bar{f}_\psi\right]_{(\lambda_1=\lambda_{lim}+e)} = 0$ et $\boldsymbol{\sigma}_d$ continu à la frontière.

Il reste à construire une expression physiquement sensée de l'énergie libre massique de Helmholtz $\bar{f}_\psi(T, \{\boldsymbol{I}_\bullet\}, e)$.

Sixième partie

Conclusion sur les modèles à une seule variable d'état mnésique

Modèles à une variable d'état mnésique

- Une seule variable d'état mnésique α scalaire et objective.
  (α est l'histoire macroscopique de phénomènes microscopiques).
- La loi d'évolution $\dot{\alpha}$ se déduit de la définition de α.
- Les modèles sont souvent « à seuil », mais on peut le supprimer.
- Quand le seuil est indépendant des anisotropies,
  ces modèles sont valables quelles que soient les anisotropies.
- Énergie libre massique de Helmholtz : $\bar{f}_\psi(T, I_1, \cdots, I_m, \alpha)$
- Il existe un espace des états admissibles (une partie de $\mathbb{R}^{m+2}$).
- $\boldsymbol{\sigma} = \underbrace{\frac{\rho_0}{K_v} \sum_{j=1}^{m} \partial_{i_j} \bar{f}_\psi \boldsymbol{S}_j}_{\boldsymbol{\sigma}_{ref}^{(\alpha)}} + \boldsymbol{\sigma}_d(\boldsymbol{D}, \cdots) \quad$ avec $\quad \forall \boldsymbol{D},\ \underbrace{\boldsymbol{\sigma}_d(\boldsymbol{D}, \cdots) : \boldsymbol{D}}_{\Phi_{int}} \geqslant 0$
- Continuité des contraintes sur la frontière des états admissibles :
  $[\partial_\alpha \bar{f}_\psi]_{(\text{sur la frontière})} = 0,$ et continuité de $\boldsymbol{\sigma}_d$.
- L'expression de l'énergie libre massique de Helmholtz
  $\bar{f}_\psi(T, \{I_\bullet\}, \alpha)$ doit être physiquement sensée.

Septième partie

Inélasticité à plusieurs variables d'état mnésiques

Variables d'état

Objectif :

Améliorer la représentation macroscopique des phénomènes microscopiques.

Exemples :

- solides plastifiables et endommageables ; (deux scalaires p et c)
- représentation d'une microfissure par un vecteur mnésique.
  ($\widetilde{\boldsymbol{v}}$ unitaire : orientation de la fissure et éventuellement une « intensité » de la fissure $\|\boldsymbol{v}\|$)

Variables d'état tensorielles objectives indépendantes :

- La température T (thermodynamique)
- Variables d'état cinématiques : $\{\boldsymbol{X}, \{\boldsymbol{N}_t^\bullet\}\}$ (solide déformable anisotrope)
- Variables d'état mnésiques tensorielles : $\{\boldsymbol{\alpha}^\bullet\}$ (d'ordre 0 ou plus)

Variables d'état scalaires indépendantes : (th. des fonctions isotropes)

$$\Big\{T, \underbrace{\{\text{inv. de } \boldsymbol{X}\}, \{\text{inv. croisés de } \boldsymbol{X} \text{ et } \boldsymbol{N}_t^\bullet\}}_{\text{variables d'état cinématiques : } \{I_\bullet\}}, \underbrace{\{\text{inv. des } \boldsymbol{\alpha}^\bullet\}, \{\text{inv. croisés de } \boldsymbol{X} \text{ et } \boldsymbol{\alpha}^\bullet\}}_{\text{variables d'état mnésiques : } \{\alpha_\bullet\}}\Big\}$$

- pour chaque $\boldsymbol{\alpha}^\bullet$ vectoriel :
  1 invariant propre et 2 invariants croisés avec $\boldsymbol{X}$; (ou moins)
- pour chaque $\boldsymbol{\alpha}^\bullet$ du second ordre symétrique :
  3 invariants propres et 3 invariants croisés avec $\boldsymbol{X}$. (ou moins)

Construction d'un modèle (à k variables mnésiques)

- Choix des variables d'état indépendantes : $\{T, \{\boldsymbol{I}_\bullet\}, \alpha_1, \cdots, \alpha_k\}$
  (les modes de mémorisation de chaque $\alpha_\bullet$ sont à définir)
- k frontières des états admissibles : les états admissibles du modèle sont l'intersection des k espaces des états admissibles.
- k lois d'évolution : $\dot{\alpha}_j = \partial_T \alpha_j \, \dot{T} + \begin{cases} \boldsymbol{S}_{\alpha_j} : \boldsymbol{D} & \text{(quand } \alpha_j \text{ évolue)} \\ 0 \end{cases}$
- Dissipation intrinsèque non négative dans toute évolution :
  $$\forall \dot{T}\ \forall \boldsymbol{D},\quad -\rho\,(\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s)\,\dot{T} + \left(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_{ref}^{\{\alpha_\bullet\}}\right) : \boldsymbol{D} - \rho \sum_{j=1}^{k} \partial_{\alpha_j} \bar{f}_\psi \, \dot{\alpha}_j \geqslant 0$$
  $\forall \dot{T} \quad \Rightarrow \quad$ une relation de Helmholtz. (inhabituelle si $\partial_T \alpha_j \neq 0$)
  $\forall \boldsymbol{D} \quad \Rightarrow \quad$ une loi de comportement mécanique :
  $$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_{ref}^{\{\alpha_\bullet\}} + \rho \sum_{j=1}^{k} \begin{cases} \boldsymbol{S}_{\alpha_j} & \text{(quand } \alpha_j \text{ évolue)} \\ 0 \end{cases} + \boldsymbol{\sigma}_d(\boldsymbol{D}, \dot{T}, \cdots)$$
- Continuité des contraintes $\Rightarrow$ k conditions sur $\bar{f}_\psi$:
  $[\partial_{\alpha_j} \bar{f}_\psi]_{\text{(quand } \alpha_j \text{ évolue)}} = 0$ pour $j \in [1\,;k]$
- Construction de $\bar{f}_\psi$ (chemin conduisant à un état admissible quelconque)
- Choix des contraintes dissipatives : $\forall \boldsymbol{D},\ \boldsymbol{\sigma}_d(\boldsymbol{D}, \dot{T}, \cdots) : \boldsymbol{D} \geqslant 0$

Huitième partie

Épilogue

Pour tous les milieux continus (fluides et solides)

Enchaînement des cours
Questions ouvertes
Et après...

1. Algèbre et analyse tensorielles : (en dimension 3)
   - opérations tensorielles : $+\,,-\,,\otimes\,,\mathrm{tr}\,,\cdot\,,:\,,\cdots$
   - ordre 2 : **sym** / **asym** , **sph** / **dev** , spectre, invariants, positivité, orthogonalité, décomposition polaire ;
   - fonctions tensorielles, théorème des fonctions isotropes ;
   - champs tensoriels : **grad** , **div** , **rot** , $\boldsymbol{\Delta}$.
2. Cinématique : (milieu continu, physique classique)
   - changement d'observateur, grandeurs objectives, relations universelles ;
   - tenseurs de déformation, tenseur des taux de déformation.
3. Équations générales : (milieu continu, physique classique)
   - conservation de la masse : $\frac{\dot{\rho}}{\rho} = -\mathrm{tr}\boldsymbol{D} \;\Leftrightarrow\; \frac{\rho_0}{\rho} = K_v$
   - mécanique de Newton : $\mathbf{div}_E\,\boldsymbol{\sigma} + \rho\boldsymbol{f}_0^m = \rho\,\boldsymbol{\gamma}$
   - conservation de l'énergie : $\rho\,\dot{e} = \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{D} + r_{ext}^v - \mathrm{div}_E\,\boldsymbol{q}$
   - second principe de la thermodynamique :

$$\Phi = \underbrace{-\rho\,(\dot{\psi}^m + s^m\,\dot{T}) + \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{D}}_{\Phi_{int}} \underbrace{-\frac{\boldsymbol{q}}{T}\cdot\mathbf{grad}\,T}_{\Phi_{th}\geqslant 0} \geqslant 0$$

Pour tous les solides déformables

4. Élasticité : (thermoélasticité, déformations quelconques)
    - définition thermodynamique de l'élasticité :
        - variables d'état : $\{T, \boldsymbol{X}, \{\boldsymbol{N}_t^\bullet\}\}$ (pas de variables mnésiques)
        - $\Phi_{int} = 0$ (mais $\Phi_{th} \geqslant 0$)
        - $\boldsymbol{\sigma}$ est une fonction d'état.
    - solides isotropes, (pas de direction d'anisotropie)
    - solides isotropes transverses, (une seule direction d'anisotropie)
    - élasticité générique ; (toutes anisotropies)
5. Inélasticité : (thermo-inélasticité, déformations quelconques, toutes anisotropies)
    - définition : non élastique (négation d'un des axiomes de l'élasticité)
    - sans variable mnésique, (viscoélasticité)
    - une seule variable mnésique, (plasticité, endommagement)
    - plusieurs variables mnésiques, (comportements complexes)

Quelques questions non abordées

- Milieux monoconstituants à comportement complexe.
  Ex. dans les élastomères : « effet » Mullins, « effet » Payne.
- Milieux continus multiconstituants : (multiphasiques)
  - Il faut des variables d'état non mnésiques en plus :
    les concentrations actuelles de $n-1$ constituants,
  - Les variations de concentration peuvent être exothermiques ou endothermiques.
    Elles induisent donc une dissipation intrinsèque.
  - Définition des efforts intérieurs. (un ou plusieurs tenseurs ?)
- Matériaux à « mémoire de forme ».
- Milieux granulaires. (peut-on les traiter comme des milieux continus ?)
- Milieux « polarisés ». (milieux électromagnétiques, piézoélectricité)
- ...

Il reste donc du travail à faire ...

Place aux jeunes !

La suite est à développer : questions ouvertes, matériaux nouveaux...

Suggestion de deux recommandations :

- Ne rien croire sur parole : (recommandation salutaire !)
  - Les publications scientifiques sont parfois douteuses : les vérifier, voire les critiquer. (hypothèses cachées, sous-entendus)
  - Ne vous soumettez pas paresseusement aux arguments d'autorité ou à la tradition. (garder un esprit critique constructif)
  - La « loi de la majorité » n'a aucune valeur en sciences.
- Pratiquer l'honnêteté intellectuelle :
  - Mettez en évidence vos hypothèses ou vos conjectures.
  - Pratiquez une rigueur théorique (démonstrations) et expérimentale (danger d'interprétations abusives).
  - La malhonnêteté est nuisible à tous et à l'avenir !

J'espère vous avoir donné l'envie de poursuivre.

Merci de votre attention.