# Comportements inélastiques
## (solides déformables monoconstituants)

**Jean Garrigues**

mailto:jean.garrigues@centrale-marseille.fr

http://jean.garrigues.perso.centrale-marseille.fr/

Lundi 18 et mercredi 20 juin 2018

# Au programme...

# Au programme...

1. Inélastiicité des solides monoconstituants

# Au programme...

# Au programme...

1. Inélasticité des solides monoconstituants
2. Inélasticité sans variable d'état mnésique
3. Inélasticité à une variable d'état mnésique

# Au programme...

1. Inélasticité des solides monoconstituants
2. Inélasticité sans variable d'état mnésique
3. Inélasticité à une variable d'état mnésique
4. Un modèle de plasticité

# Au programme...

1. Inélasticité des solides monoconstituants
2. Inélasticité sans variable d'état mnésique
3. Inélasticité à une variable d'état mnésique
4. Un modèle de plasticité
5. Deux modèles d'endommagement

# Au programme...

# Au programme...

1. Inélasticité des solides monoconstituants
2. Inélasticité sans variable d'état mnésique
3. Inélasticité à une variable d'état mnésique
4. Un modèle de plasticité
5. Deux modèles d'endommagement
6. Synthèse partielle
7. Inélasticités à plusieurs variables mnésiques

# Au programme...

Première partie

# Définition de l'inélasticité

## (solides déformables monoconstituants)

# Variables d'état d'une particule

# Variables d'état d'une particule

## Variables d'état en inélasticité (solide monoconstituant) :

# Variables d'état d'une particule

## Variables d'état en inélasticité (solide monoconstituant) :

1. La température $T$.

# Variables d'état d'une particule



## Variables d'état en inélasticité (solide monoconstituant) :

1. La température $T$. (imposée par la thermodynamique)

# Variables d'état d'une particule



## Variables d'état en inélasticité (solide monoconstituant) :

1. La température $T$. (imposée par la thermodynamique)
2. Des variables d'état cinématiques :

# Variables d'état d'une particule



## Variables d'état en inélasticité (solide monoconstituant) :

1. La température $T$. (imposée par la thermodynamique)
2. Des variables d'état cinématiques :
   - la déformation actuelle $\boldsymbol{X}$ (ordre 2, symétrique, objectif) ;

# Variables d'état d'une particule



## Variables d'état en inélasticité (solide monoconstituant) :

1. La température $T$. (imposée par la thermodynamique)
2. Des variables d'état cinématiques :
   - la déformation actuelle $\boldsymbol{X}$ (ordre 2, symétrique, objectif) ;
   - d'éventuelles directions actuelles d'anisotropie $\boldsymbol{N}_t^{\bullet}$.

# Variables d'état d'une particule



## Variables d'état en inélasticité (solide monoconstituant) :

1. La température $T$. (imposée par la thermodynamique)
2. Des variables d'état cinématiques :
   - la déformation actuelle $\boldsymbol{X}$ (ordre 2, symétrique, objectif) ;
   - d'éventuelles directions actuelles d'anisotropie $\boldsymbol{N}_t^\bullet$.

   Rappel : $\boldsymbol{N}_t^\bullet = \boldsymbol{n}_t^\bullet \otimes \boldsymbol{n}_t^\bullet$. (tenseur d'ordre 2 uniaxial unitaire)

# Variables d'état d'une particule



## Variables d'état en inélasticité (solide monoconstituant) :

1. La température $T$. (imposée par la thermodynamique)
2. Des variables d'état cinématiques :
   - la déformation actuelle $\boldsymbol{X}$ (ordre 2, symétrique, objectif) ;
   - d'éventuelles directions actuelles d'anisotropie $\boldsymbol{N}_t^\bullet$.

     Rappel : $\boldsymbol{N}_t^\bullet = \boldsymbol{n}_t^\bullet \otimes \boldsymbol{n}_t^\bullet$. (tenseur d'ordre 2 uniaxial unitaire)
3. Absence de variable d'état de concentration.

# Variables d'état d'une particule



## Variables d'état en inélasticité (solide monoconstituant) :

1. La température $T$. (imposée par la thermodynamique)
2. Des variables d'état cinématiques :
   - la déformation actuelle $\boldsymbol{X}$ (ordre 2, symétrique, objectif) ;
   - d'éventuelles directions actuelles d'anisotropie $\boldsymbol{N}_t^{\bullet}$.

     Rappel : $\boldsymbol{N}_t^{\bullet} = \boldsymbol{n}_t^{\bullet} \otimes \boldsymbol{n}_t^{\bullet}$. (tenseur d'ordre 2 uniaxial unitaire)
3. Absence de variable d'état de concentration. (monoconstituant)

# Variables d'état d'une particule

## Variables d'état en inélasticité (solide monoconstituant) :

1. La température $T$. (imposée par la thermodynamique)
2. Des variables d'état cinématiques :
   - la déformation actuelle $\boldsymbol{X}$ (ordre 2, symétrique, objectif) ;
   - d'éventuelles directions actuelles d'anisotropie $\boldsymbol{N}_t^\bullet$.

     Rappel : $\boldsymbol{N}_t^\bullet = \boldsymbol{n}_t^\bullet \otimes \boldsymbol{n}_t^\bullet$. (tenseur d'ordre 2 uniaxial unitaire)
3. Absence de variable d'état de concentration. (monoconstituant)
   Dans les évolutions, il n'y ni changement de phase ni réaction chimique (endothermique ou exothermique).

Variables d'état
Rappel d'élasticité
Inélasticité monoconst.

# Variables d'état d'une particule



## Variables d'état en inélasticité (solide monoconstituant) :

1. La température $T$. (imposée par la thermodynamique)
2. Des variables d'état cinématiques :
   - la déformation actuelle $\boldsymbol{X}$ (ordre 2, symétrique, objectif) ;
   - d'éventuelles directions actuelles d'anisotropie $\boldsymbol{N}_t^\bullet$.

     Rappel : $\boldsymbol{N}_t^\bullet = \boldsymbol{n}_t^\bullet \otimes \boldsymbol{n}_t^\bullet$. (tenseur d'ordre 2 uniaxial unitaire)
3. Absence de variable d'état de concentration. (monoconstituant)
   Dans les évolutions, il n'y ni changement de phase ni réaction chimique (endothermique ou exothermique).
   La seule source de dissipation intrinsèque est le frottement : $\Phi_{int} \geqslant 0$.

# Variables d'état d'une particule

Variables d'état
Rappel d'élasticité
Inélasticité monoconst.

## Variables d'état en inélasticité (solide monoconstituant) :

1. La température $T$. (imposée par la thermodynamique)
2. Des variables d'état cinématiques :
   - la déformation actuelle $\boldsymbol{X}$ (ordre 2, symétrique, objectif) ;
   - d'éventuelles directions actuelles d'anisotropie $\boldsymbol{N}_t^\bullet$.

     Rappel : $\boldsymbol{N}_t^\bullet = \boldsymbol{n}_t^\bullet \otimes \boldsymbol{n}_t^\bullet$. (tenseur d'ordre 2 uniaxial unitaire)
3. Absence de variable d'état de concentration. (monoconstituant)
   Dans les évolutions, il n'y ni changement de phase ni réaction chimique (endothermique ou exothermique).
   La seule source de dissipation intrinsèque est le frottement : $\Phi_{int} \geqslant 0$.
4. D'éventuelles variables d'état mnésiques actuelles $\boldsymbol{\alpha}_t^\bullet$.

# Variables d'état d'une particule



## Variables d'état en inélasticité (solide monoconstituant) :

1. La température $T$. (imposée par la thermodynamique)
2. Des variables d'état cinématiques :
   - la déformation actuelle $\boldsymbol{X}$ (ordre 2, symétrique, objectif) ;
   - d'éventuelles directions actuelles d'anisotropie $\boldsymbol{N}_t^\bullet$.

   Rappel : $\boldsymbol{N}_t^\bullet = \boldsymbol{n}_t^\bullet \otimes \boldsymbol{n}_t^\bullet$. (tenseur d'ordre 2 uniaxial unitaire)
3. Absence de variable d'état de concentration. (monoconstituant)
   Dans les évolutions, il n'y ni changement de phase ni réaction chimique (endothermique ou exothermique).
   La seule source de dissipation intrinsèque est le frottement : $\Phi_{int} \geqslant 0$.
4. D'éventuelles variables d'état mnésiques actuelles $\boldsymbol{\alpha}_t^\bullet$.
   (**résumé utile** du chemin suivi pour aboutir à l'état actuel)

# Variables d'état d'une particule



## Variables d'état en inélasticité (solide monoconstituant) :

1. La température $T$. (imposée par la thermodynamique)
2. Des variables d'état cinématiques :
   - la déformation actuelle $\boldsymbol{X}$ (ordre 2, symétrique, objectif) ;
   - d'éventuelles directions actuelles d'anisotropie $\boldsymbol{N}_t^{\bullet}$.

     Rappel : $\boldsymbol{N}_t^{\bullet} = \boldsymbol{n}_t^{\bullet} \otimes \boldsymbol{n}_t^{\bullet}$. (tenseur d'ordre 2 uniaxial unitaire)
3. Absence de variable d'état de concentration. (monoconstituant)
   Dans les évolutions, il n'y ni changement de phase ni réaction chimique (endothermique ou exothermique).
   La seule source de dissipation intrinsèque est le frottement : $\Phi_{int} \geqslant 0$.
4. D'éventuelles variables d'état mnésiques actuelles $\boldsymbol{\alpha}_t^{\bullet}$.
   (résumé utile du chemin suivi pour aboutir à l'état actuel)

## Conséquence du théorème des fonctions isotropes :

# Variables d'état d'une particule



## Variables d'état en inélasticité (solide monoconstituant) :

1. La température $T$. (imposée par la thermodynamique)
2. Des variables d'état cinématiques :
   - la déformation actuelle $\boldsymbol{X}$ (ordre 2, symétrique, objectif) ;
   - d'éventuelles directions actuelles d'anisotropie $\boldsymbol{N}_t^\bullet$.

     Rappel : $\boldsymbol{N}_t^\bullet = \boldsymbol{n}_t^\bullet \otimes \boldsymbol{n}_t^\bullet$. (tenseur d'ordre 2 uniaxial unitaire)
3. Absence de variable d'état de concentration. (monoconstituant)
   Dans les évolutions, il n'y ni changement de phase ni réaction chimique (endothermique ou exothermique).
   La seule source de dissipation intrinsèque est le frottement : $\Phi_{int} \geqslant 0$.
4. D'éventuelles variables d'état mnésiques actuelles $\boldsymbol{\alpha}_t^\bullet$.
   (résumé utile du chemin suivi pour aboutir à l'état actuel)

## Conséquence du théorème des fonctions isotropes :

Les variables d'état cinématiques retenues pour le modèle

# Variables d'état d'une particule



## Variables d'état en inélasticité (solide monoconstituant) :

1. La température $T$. (imposée par la thermodynamique)
2. Des variables d'état cinématiques :
   - la déformation actuelle $\boldsymbol{X}$ (ordre 2, symétrique, objectif) ;
   - d'éventuelles directions actuelles d'anisotropie $\boldsymbol{N}_t^\bullet$.
     Rappel : $\boldsymbol{N}_t^\bullet = \boldsymbol{n}_t^\bullet \otimes \boldsymbol{n}_t^\bullet$. (tenseur d'ordre 2 uniaxial unitaire)
3. Absence de variable d'état de concentration. (monoconstituant)
   Dans les évolutions, il n'y ni changement de phase ni réaction chimique (endothermique ou exothermique).
   La seule source de dissipation intrinsèque est le frottement : $\Phi_{int} \geqslant 0$.
4. D'éventuelles variables d'état mnésiques actuelles $\boldsymbol{\alpha}_t^\bullet$.
   (résumé utile du chemin suivi pour aboutir à l'état actuel)

## Conséquence du théorème des fonctions isotropes :

Les variables d'état cinématiques retenues pour le modèle se réduisent à une liste de variables d'état scalaires indépendantes : $\{I_1, \cdots, I_m\}$.

# Variables d'état d'une particule



## Variables d'état en inélasticité (solide monoconstituant) :

1. La température $T$. (imposée par la thermodynamique)
2. Des variables d'état cinématiques :
   - la déformation actuelle $\boldsymbol{X}$ (ordre 2, symétrique, objectif) ;
   - d'éventuelles directions actuelles d'anisotropie $\boldsymbol{N}_t^\bullet$.
     Rappel : $\boldsymbol{N}_t^\bullet = \boldsymbol{n}_t^\bullet \otimes \boldsymbol{n}_t^\bullet$. (tenseur d'ordre 2 uniaxial unitaire)
3. Absence de variable d'état de concentration. (monoconstituant)
   Dans les évolutions, il n'y ni changement de phase ni réaction chimique (endothermique ou exothermique).
   La seule source de dissipation intrinsèque est le frottement : $\Phi_{int} \geqslant 0$.
4. D'éventuelles variables d'état mnésiques actuelles $\boldsymbol{\alpha}_t^\bullet$.
   (résumé utile du chemin suivi pour aboutir à l'état actuel)

## Conséquence du théorème des fonctions isotropes :

Les variables d'état cinématiques retenues pour le modèle se réduisent à une liste de variables d'état scalaires indépendantes : $\{I_1, \cdots, I_m\}$.
(construites avec des invariants de $\boldsymbol{X}$ et des invariants croisés entre $\boldsymbol{X}$ et $\boldsymbol{N}_t^\bullet$)

# Dérivée particulaire des variables d'état cinématiques

# Dérivée particulaire des variables d'état cinématiques



## Rappel :

# Dérivée particulaire des variables d'état cinématiques



## Rappel :

Les dérivées particulaires des variables d'état cinématiques scalaires $\{I_1, \cdots, I_m\}$ s'écrivent toutes sous la forme :

$$\dot{I}_j = \boldsymbol{S}_j : \boldsymbol{D}$$

# Dérivée particulaire des variables d'état cinématiques



## Rappel :

Les dérivées particulaires des variables d'état cinématiques scalaires $\{I_1, \cdots, I_m\}$ s'écrivent toutes sous la forme :

$\dot{I}_j = \boldsymbol{S}_j : \boldsymbol{D}$ ($\boldsymbol{S}_j$ d'ordre 2, symétrique, particulier à chaque variable d'état $I_j$)

# Dérivée particulaire des variables d'état cinématiques



## Rappel :

Les dérivées particulaires des variables d'état cinématiques scalaires $\{I_1, \cdots, I_m\}$ s'écrivent toutes sous la forme :

$\dot{I}_j = \boldsymbol{S}_j : \boldsymbol{D}$ ($S_j$ d'ordre 2, symétrique, particulier à chaque variable d'état $I_j$)

## Exemples :

# Dérivée particulaire des variables d'état cinématiques



## Rappel :

Les dérivées particulaires des variables d'état cinématiques scalaires $\{I_1, \cdots, I_m\}$ s'écrivent toutes sous la forme :

$\dot{I}_j = \boldsymbol{S}_j : \boldsymbol{D}$ ($S_j$ d'ordre 2, symétrique, particulier à chaque variable d'état $I_j$)

## Exemples :

(voir les cours de cinématique et d'élasticité)

# Dérivée particulaire des variables d'état cinématiques



## Rappel :

Les dérivées particulaires des variables d'état cinématiques scalaires $\{I_1, \cdots, I_m\}$ s'écrivent toutes sous la forme :

$\dot{I}_j = \boldsymbol{S}_j : \boldsymbol{D}$ ($S_j$ d'ordre 2, symétrique, particulier à chaque variable d'état $I_j$)

## Exemples :

(voir les cours de cinématique et d'élasticité)

$\dot{B}_{\mathrm{I}} = 2\boldsymbol{B} : \boldsymbol{D}$

# Dérivée particulaire des variables d'état cinématiques



## Rappel :

Les dérivées particulaires des variables d'état cinématiques scalaires $\{I_1, \cdots, I_m\}$ s'écrivent toutes sous la forme :

$\dot{I}_j = \boldsymbol{S}_j : \boldsymbol{D}$ ($\boldsymbol{S}_j$ d'ordre 2, symétrique, particulier à chaque variable d'état $I_j$)

## Exemples :

(voir les cours de cinématique et d'élasticité)

$\dot{B}_{\mathrm{I}} = 2\boldsymbol{B} : \boldsymbol{D}$ $\dot{B}_{\mathrm{II}} = 2\left(B_{\mathrm{I}}\boldsymbol{B} - \boldsymbol{B}^2\right) : \boldsymbol{D}$

# Dérivée particulaire des variables d'état cinématiques



## Rappel :

Les dérivées particulaires des variables d'état cinématiques scalaires $\{I_1, \cdots, I_m\}$ s'écrivent toutes sous la forme :

$\dot{I}_j = \boldsymbol{S}_j : \boldsymbol{D}$ ($S_j$ d'ordre 2, symétrique, particulier à chaque variable d'état $I_j$)

## Exemples :

(voir les cours de cinématique et d'élasticité)

$\dot{B}_{\mathrm{I}} = 2\,\boldsymbol{B} : \boldsymbol{D}$ $\dot{B}_{\mathrm{II}} = 2\left(B_{\mathrm{I}}\,\boldsymbol{B} - \boldsymbol{B}^2\right) : \boldsymbol{D}$ $\dot{B}_{\mathrm{III}} = 2\,B_{\mathrm{III}}\,\boldsymbol{G} : \boldsymbol{D}$

# Dérivée particulaire des variables d'état cinématiques



## Rappel :

Les dérivées particulaires des variables d'état cinématiques scalaires $\{I_1, \cdots, I_m\}$ s'écrivent toutes sous la forme :

$\dot{I}_j = \boldsymbol{S}_j : \boldsymbol{D}$ ($S_j$ d'ordre 2, symétrique, particulier à chaque variable d'état $I_j$)

## Exemples :

(voir les cours de cinématique et d'élasticité)

$$\dot{B}_{\mathrm{I}} = 2\boldsymbol{B} : \boldsymbol{D} \qquad \dot{B}_{\mathrm{II}} = 2\left(B_{\mathrm{I}}\boldsymbol{B} - \boldsymbol{B}^2\right) : \boldsymbol{D} \qquad \dot{B}_{\mathrm{III}} = 2\,B_{\mathrm{III}}\,\boldsymbol{G} : \boldsymbol{D}$$

$$(\boldsymbol{B} : \boldsymbol{N}_t)^{\cdot} = \Big(4\,\mathbf{sym}(\boldsymbol{N}_t \cdot \boldsymbol{B}) - 2\,(\boldsymbol{B} : \boldsymbol{N}_t)\,\boldsymbol{N}_t\Big) : \boldsymbol{D}$$

# Dérivée particulaire des variables d'état cinématiques



## Rappel :

Les dérivées particulaires des variables d'état cinématiques scalaires $\{I_1, \cdots, I_m\}$ s'écrivent toutes sous la forme :

$$\dot{I}_j = \boldsymbol{S}_j : \boldsymbol{D} \qquad (\boldsymbol{S}_j \text{ d'ordre 2, symétrique, particulier à chaque variable d'état } I_j)$$

## Exemples :

(voir les cours de cinématique et d'élasticité)

$$\dot{B}_{\mathrm{I}} = 2\boldsymbol{B} : \boldsymbol{D} \qquad \dot{B}_{\mathrm{II}} = 2\,(B_{\mathrm{I}}\boldsymbol{B} - \boldsymbol{B}^2) : \boldsymbol{D} \qquad \dot{B}_{\mathrm{III}} = 2\,B_{\mathrm{III}}\,\boldsymbol{G} : \boldsymbol{D}$$

$$(\boldsymbol{B} : \boldsymbol{N}_t)^{\cdot} = \big(4\,\mathbf{sym}(\boldsymbol{N}_t \cdot \boldsymbol{B}) - 2\,(\boldsymbol{B} : \boldsymbol{N}_t)\boldsymbol{N}_t\big) : \boldsymbol{D}$$

$$(\boldsymbol{B}^2 : \boldsymbol{N}_t)^{\cdot} = \big(4\,\mathbf{sym}(\boldsymbol{N}_t \cdot \boldsymbol{B}^2) - 2\,(\boldsymbol{B}^2 : \boldsymbol{N}_t)\boldsymbol{N}_t + 2\,(\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{N}_t \cdot \boldsymbol{B})\big) : \boldsymbol{D}$$

# Dérivée particulaire des variables d'état cinématiques



## Rappel :

Les dérivées particulaires des variables d'état cinématiques scalaires $\{I_1, \cdots, I_m\}$ s'écrivent toutes sous la forme :

$\dot{I}_j = \boldsymbol{S}_j : \boldsymbol{D}$ ($S_j$ d'ordre 2, symétrique, particulier à chaque variable d'état $I_j$)

## Exemples :

(voir les cours de cinématique et d'élasticité)

$$\dot{B}_{\mathrm{I}} = 2\boldsymbol{B} : \boldsymbol{D} \qquad \dot{B}_{\mathrm{II}} = 2\left(B_{\mathrm{I}}\boldsymbol{B} - \boldsymbol{B}^2\right) : \boldsymbol{D} \qquad \dot{B}_{\mathrm{III}} = 2\,B_{\mathrm{III}}\,\boldsymbol{G} : \boldsymbol{D}$$

$$(\boldsymbol{B} : \boldsymbol{N}_t)^{\cdot} = \big(4\,\mathbf{sym}(\boldsymbol{N}_t \cdot \boldsymbol{B}) - 2\,(\boldsymbol{B} : \boldsymbol{N}_t)\boldsymbol{N}_t\big) : \boldsymbol{D}$$

$$(\boldsymbol{B}^2 : \boldsymbol{N}_t)^{\cdot} = \big(4\,\mathbf{sym}(\boldsymbol{N}_t \cdot \boldsymbol{B}^2) - 2\,(\boldsymbol{B}^2 : \boldsymbol{N}_t)\boldsymbol{N}_t + 2\,(\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{N}_t \cdot \boldsymbol{B})\big) : \boldsymbol{D}$$

$$\dot{K}_v = K_v\,\boldsymbol{G} : \boldsymbol{D}$$

# Dérivée particulaire des variables d'état cinématiques



## Rappel :

Les dérivées particulaires des variables d'état cinématiques scalaires $\{I_1, \cdots, I_m\}$ s'écrivent toutes sous la forme :

$$\dot{I}_j = \boldsymbol{S}_j : \boldsymbol{D}$$ ($\boldsymbol{S}_j$ d'ordre 2, symétrique, particulier à chaque variable d'état $I_j$)

## Exemples :

(voir les cours de cinématique et d'élasticité)

$$\dot{B}_{\mathrm{I}} = 2\boldsymbol{B} : \boldsymbol{D} \qquad \dot{B}_{\mathrm{II}} = 2\,(B_{\mathrm{I}}\boldsymbol{B} - \boldsymbol{B}^2) : \boldsymbol{D} \qquad \dot{B}_{\mathrm{III}} = 2\,B_{\mathrm{III}}\,\boldsymbol{G} : \boldsymbol{D}$$

$$(\boldsymbol{B} : \boldsymbol{N}_t)^{\cdot} = \big(4\,\mathbf{sym}(\boldsymbol{N}_t \cdot \boldsymbol{B}) - 2\,(\boldsymbol{B} : \boldsymbol{N}_t)\boldsymbol{N}_t\big) : \boldsymbol{D}$$

$$(\boldsymbol{B}^2 : \boldsymbol{N}_t)^{\cdot} = \big(4\,\mathbf{sym}(\boldsymbol{N}_t \cdot \boldsymbol{B}^2) - 2\,(\boldsymbol{B}^2 : \boldsymbol{N}_t)\boldsymbol{N}_t + 2\,(\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{N}_t \cdot \boldsymbol{B})\big) : \boldsymbol{D}$$

$$\dot{K}_v = K_v\,\boldsymbol{G} : \boldsymbol{D} \qquad \dot{\delta} = \Big(\frac{\delta^{1/3}}{{K_v}^{2/3}}\,\boldsymbol{B} - \delta\,\boldsymbol{G}\Big) : \boldsymbol{D}$$

# Dérivée particulaire des variables d'état cinématiques



## Rappel :

Les dérivées particulaires des variables d'état cinématiques scalaires $\{I_1, \cdots, I_m\}$ s'écrivent toutes sous la forme :

$\dot{I}_j = \boldsymbol{S}_j : \boldsymbol{D}$ ($\boldsymbol{S}_j$ d'ordre 2, symétrique, particulier à chaque variable d'état $I_j$)

## Exemples :

(voir les cours de cinématique et d'élasticité)

$$\dot{B}_{\mathrm{I}} = 2\boldsymbol{B} : \boldsymbol{D} \qquad \dot{B}_{\mathrm{II}} = 2\,(B_{\mathrm{I}}\boldsymbol{B} - \boldsymbol{B}^2) : \boldsymbol{D} \qquad \dot{B}_{\mathrm{III}} = 2\,B_{\mathrm{III}}\,\boldsymbol{G} : \boldsymbol{D}$$

$$(\boldsymbol{B} : \boldsymbol{N}_t)^{\cdot} = \big(4\,\mathbf{sym}(\boldsymbol{N}_t \cdot \boldsymbol{B}) - 2\,(\boldsymbol{B} : \boldsymbol{N}_t)\boldsymbol{N}_t\big) : \boldsymbol{D}$$

$$(\boldsymbol{B}^2 : \boldsymbol{N}_t)^{\cdot} = \big(4\,\mathbf{sym}(\boldsymbol{N}_t \cdot \boldsymbol{B}^2) - 2\,(\boldsymbol{B}^2 : \boldsymbol{N}_t)\boldsymbol{N}_t + 2\,(\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{N}_t \cdot \boldsymbol{B})\big) : \boldsymbol{D}$$

$$\dot{K}_v = K_v\,\boldsymbol{G} : \boldsymbol{D} \qquad \dot{\delta} = \Big(\frac{\delta^{1/3}}{{K_v}^{2/3}}\boldsymbol{B} - \delta\,\boldsymbol{G}\Big) : \boldsymbol{D}$$

(rappel : $\delta$ abréviation de $\delta^s_{max}$)

# Dérivée particulaire des variables d'état cinématiques



## Rappel :

Les dérivées particulaires des variables d'état cinématiques scalaires $\{I_1, \cdots, I_m\}$ s'écrivent toutes sous la forme :

$\dot{I}_j = \boldsymbol{S}_j : \boldsymbol{D}$ ($\boldsymbol{S}_j$ d'ordre 2, symétrique, particulier à chaque variable d'état $I_j$)

## Exemples : (voir les cours de cinématique et d'élasticité)

$$\dot{B}_{\mathrm{I}} = 2\boldsymbol{B} : \boldsymbol{D} \qquad \dot{B}_{\mathrm{II}} = 2\,(B_{\mathrm{I}}\boldsymbol{B} - \boldsymbol{B}^2) : \boldsymbol{D} \qquad \dot{B}_{\mathrm{III}} = 2\,B_{\mathrm{III}}\,\boldsymbol{G} : \boldsymbol{D}$$

$$(\boldsymbol{B} : \boldsymbol{N}_t)^{\cdot} = \big(4\,\mathbf{sym}(\boldsymbol{N}_t \cdot \boldsymbol{B}) - 2\,(\boldsymbol{B} : \boldsymbol{N}_t)\boldsymbol{N}_t\big) : \boldsymbol{D}$$

$$(\boldsymbol{B}^2 : \boldsymbol{N}_t)^{\cdot} = \big(4\,\mathbf{sym}(\boldsymbol{N}_t \cdot \boldsymbol{B}^2) - 2\,(\boldsymbol{B}^2 : \boldsymbol{N}_t)\boldsymbol{N}_t + 2\,(\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{N}_t \cdot \boldsymbol{B})\big) : \boldsymbol{D}$$

$$\dot{K}_v = K_v\,\boldsymbol{G} : \boldsymbol{D} \qquad \dot{\delta} = \Big(\frac{\delta^{1/3}}{{K_v}^{2/3}}\boldsymbol{B} - \delta\,\boldsymbol{G}\Big) : \boldsymbol{D}$$

(rappel : $\delta$ abréviation de $\delta^s_{max}$)

$$\dot{a} = \Big(\frac{\boldsymbol{B} : \boldsymbol{N}_t}{{K_v}^{2/3}}\Big)^{\cdot}$$

# Dérivée particulaire des variables d'état cinématiques



## Rappel :

Les dérivées particulaires des variables d'état cinématiques scalaires $\{I_1, \cdots, I_m\}$ s'écrivent toutes sous la forme :

$$\dot{I}_j = \boldsymbol{S}_j : \boldsymbol{D}$$ ($\boldsymbol{S}_j$ d'ordre 2, symétrique, particulier à chaque variable d'état $I_j$)

## Exemples :

(voir les cours de cinématique et d'élasticité)

$$\dot{B}_{\mathrm{I}} = 2\,\boldsymbol{B} : \boldsymbol{D} \qquad \dot{B}_{\mathrm{II}} = 2\,(B_{\mathrm{I}}\boldsymbol{B} - \boldsymbol{B}^2) : \boldsymbol{D} \qquad \dot{B}_{\mathrm{III}} = 2\,B_{\mathrm{III}}\,\boldsymbol{G} : \boldsymbol{D}$$

$$(\boldsymbol{B} : \boldsymbol{N}_t)^{\cdot} = \big(4\,\mathbf{sym}(\boldsymbol{N}_t \cdot \boldsymbol{B}) - 2\,(\boldsymbol{B} : \boldsymbol{N}_t)\boldsymbol{N}_t\big) : \boldsymbol{D}$$

$$(\boldsymbol{B}^2 : \boldsymbol{N}_t)^{\cdot} = \big(4\,\mathbf{sym}(\boldsymbol{N}_t \cdot \boldsymbol{B}^2) - 2\,(\boldsymbol{B}^2 : \boldsymbol{N}_t)\boldsymbol{N}_t + 2\,(\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{N}_t \cdot \boldsymbol{B})\big) : \boldsymbol{D}$$

$$\dot{K}_v = K_v\,\boldsymbol{G} : \boldsymbol{D} \qquad \dot{\delta} = \Big(\frac{\delta^{1/3}}{{K_v}^{2/3}}\boldsymbol{B} - \delta\,\boldsymbol{G}\Big) : \boldsymbol{D}$$ (rappel : $\delta$ abréviation de $\delta^s_{max}$)

$$\dot{a} = \Big(\frac{\boldsymbol{B}:\boldsymbol{N}_t}{{K_v}^{2/3}}\Big)^{\cdot} = \Big(-\frac{2a}{3}\,\boldsymbol{G} + \frac{4}{{K_v}^{2/3}}\,\mathbf{sym}(\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{N}_t) - 2\,a\boldsymbol{N}_t\Big) : \boldsymbol{D}$$

# Dérivée particulaire des variables d'état cinématiques



## Rappel :

Les dérivées particulaires des variables d'état cinématiques scalaires $\{I_1, \cdots, I_m\}$ s'écrivent toutes sous la forme :

$\dot{I}_j = \boldsymbol{S}_j : \boldsymbol{D}$ ($\boldsymbol{S}_j$ d'ordre 2, symétrique, particulier à chaque variable d'état $I_j$)

## Exemples :

(voir les cours de cinématique et d'élasticité)

$$\dot{B}_{\mathrm{I}} = 2\boldsymbol{B} : \boldsymbol{D} \qquad \dot{B}_{\mathrm{II}} = 2\,(B_{\mathrm{I}}\boldsymbol{B} - \boldsymbol{B}^2) : \boldsymbol{D} \qquad \dot{B}_{\mathrm{III}} = 2\,B_{\mathrm{III}}\,\boldsymbol{G} : \boldsymbol{D}$$

$$(\boldsymbol{B} : \boldsymbol{N}_t)^{\cdot} = \big(4\,\mathbf{sym}(\boldsymbol{N}_t \cdot \boldsymbol{B}) - 2\,(\boldsymbol{B} : \boldsymbol{N}_t)\boldsymbol{N}_t\big) : \boldsymbol{D}$$

$$(\boldsymbol{B}^2 : \boldsymbol{N}_t)^{\cdot} = \big(4\,\mathbf{sym}(\boldsymbol{N}_t \cdot \boldsymbol{B}^2) - 2\,(\boldsymbol{B}^2 : \boldsymbol{N}_t)\boldsymbol{N}_t + 2\,(\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{N}_t \cdot \boldsymbol{B})\big) : \boldsymbol{D}$$

$$\dot{K}_v = K_v\,\boldsymbol{G} : \boldsymbol{D} \qquad \dot{\delta} = \Big(\frac{\delta^{1/3}}{{K_v}^{2/3}}\boldsymbol{B} - \delta\,\boldsymbol{G}\Big) : \boldsymbol{D}$$

(rappel : $\delta$ abréviation de $\delta^s_{max}$)

$$\dot{a} = \Big(\frac{\boldsymbol{B} : \boldsymbol{N}_t}{{K_v}^{2/3}}\Big)^{\cdot} = \Big(-\frac{2a}{3}\boldsymbol{G} + \frac{4}{{K_v}^{2/3}}\,\mathbf{sym}(\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{N}_t) - 2\,a\boldsymbol{N}_t\Big) : \boldsymbol{D}$$

$\ldots$

# Dérivée particulaire des variables d'état cinématiques



## Rappel :

Les dérivées particulaires des variables d'état cinématiques scalaires $\{I_1, \cdots, I_m\}$ s'écrivent toutes sous la forme :

$\dot{I}_j = \boldsymbol{S}_j : \boldsymbol{D}$ ($\boldsymbol{S}_j$ d'ordre 2, symétrique, particulier à chaque variable d'état $I_j$)

## Exemples :

(voir les cours de cinématique et d'élasticité)

$$\dot{B}_{\mathrm{I}} = 2\,\boldsymbol{B} : \boldsymbol{D} \qquad \dot{B}_{\mathrm{II}} = 2\,(B_{\mathrm{I}}\boldsymbol{B} - \boldsymbol{B}^2) : \boldsymbol{D} \qquad \dot{B}_{\mathrm{III}} = 2\,B_{\mathrm{III}}\,\boldsymbol{G} : \boldsymbol{D}$$

$$(\boldsymbol{B} : \boldsymbol{N}_t)^{\cdot} = \big(4\,\mathbf{sym}(\boldsymbol{N}_t \cdot \boldsymbol{B}) - 2\,(\boldsymbol{B} : \boldsymbol{N}_t)\boldsymbol{N}_t\big) : \boldsymbol{D}$$

$$(\boldsymbol{B}^2 : \boldsymbol{N}_t)^{\cdot} = \big(4\,\mathbf{sym}(\boldsymbol{N}_t \cdot \boldsymbol{B}^2) - 2\,(\boldsymbol{B}^2 : \boldsymbol{N}_t)\boldsymbol{N}_t + 2\,(\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{N}_t \cdot \boldsymbol{B})\big) : \boldsymbol{D}$$

$$\dot{K}_v = K_v\,\boldsymbol{G} : \boldsymbol{D} \qquad \dot{\delta} = \Big(\frac{\delta^{1/3}}{K_v{}^{2/3}}\boldsymbol{B} - \delta\,\boldsymbol{G}\Big) : \boldsymbol{D}$$ (rappel : $\delta$ abréviation de $\delta^s_{max}$)

$$\dot{a} = \Big(\frac{\boldsymbol{B} : \boldsymbol{N}_t}{K_v{}^{2/3}}\Big)^{\cdot} = \Big(-\frac{2a}{3}\boldsymbol{G} + \frac{4}{K_v{}^{2/3}}\,\mathbf{sym}(\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{N}_t) - 2\,a\boldsymbol{N}_t\Big) : \boldsymbol{D}$$

$\cdots$ (exercices : autres tenseurs de déformation ou autres invariants cinématiques)

# Dérivée particulaire des variables d'état cinématiques



## Rappel :

Les dérivées particulaires des variables d'état cinématiques scalaires $\{I_1, \cdots, I_m\}$ s'écrivent toutes sous la forme :

$\dot{I}_j = \boldsymbol{S}_j : \boldsymbol{D}$ ($\boldsymbol{S}_j$ d'ordre 2, symétrique, particulier à chaque variable d'état $I_j$)

## Exemples :

(voir les cours de cinématique et d'élasticité)

$$\dot{B}_{\mathrm{I}} = 2\boldsymbol{B} : \boldsymbol{D} \qquad \dot{B}_{\mathrm{II}} = 2\,(B_{\mathrm{I}}\boldsymbol{B} - \boldsymbol{B}^2) : \boldsymbol{D} \qquad \dot{B}_{\mathrm{III}} = 2\,B_{\mathrm{III}}\,\boldsymbol{G} : \boldsymbol{D}$$

$$(\boldsymbol{B} : \boldsymbol{N}_t)^{\cdot} = \big(4\,\mathbf{sym}(\boldsymbol{N}_t \cdot \boldsymbol{B}) - 2\,(\boldsymbol{B} : \boldsymbol{N}_t)\boldsymbol{N}_t\big) : \boldsymbol{D}$$

$$(\boldsymbol{B}^2 : \boldsymbol{N}_t)^{\cdot} = \big(4\,\mathbf{sym}(\boldsymbol{N}_t \cdot \boldsymbol{B}^2) - 2\,(\boldsymbol{B}^2 : \boldsymbol{N}_t)\boldsymbol{N}_t + 2\,(\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{N}_t \cdot \boldsymbol{B})\big) : \boldsymbol{D}$$

$$\dot{K}_v = K_v\,\boldsymbol{G} : \boldsymbol{D} \qquad \dot{\delta} = \Big(\frac{\delta^{1/3}}{K_v{}^{2/3}}\boldsymbol{B} - \delta\,\boldsymbol{G}\Big) : \boldsymbol{D}$$

(rappel : $\delta$ abréviation de $\delta^s_{max}$)

$$\dot{a} = \Big(\frac{\boldsymbol{B}:\boldsymbol{N}_t}{K_v{}^{2/3}}\Big)^{\cdot} = \Big(-\frac{2a}{3}\boldsymbol{G} + \frac{4}{K_v{}^{2/3}}\,\mathbf{sym}(\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{N}_t) - 2\,a\boldsymbol{N}_t\Big) : \boldsymbol{D}$$

$\cdots$ (exercices : autres tenseurs de déformation ou autres invariants cinématiques)

Les tenseurs symétriques $\boldsymbol{S}_j$ sont des fonctions de la déformation

# Dérivée particulaire des variables d'état cinématiques



## Rappel :

Les dérivées particulaires des variables d'état cinématiques scalaires $\{I_1, \cdots, I_m\}$ s'écrivent toutes sous la forme :

$$\dot{I}_j = \boldsymbol{S}_j : \boldsymbol{D}$$ ($\boldsymbol{S}_j$ d'ordre 2, symétrique, particulier à chaque variable d'état $I_j$)

## Exemples :

(voir les cours de cinématique et d'élasticité)

$$\dot{B}_{\mathrm{I}} = 2\boldsymbol{B} : \boldsymbol{D} \qquad \dot{B}_{\mathrm{II}} = 2\,(B_{\mathrm{I}}\boldsymbol{B} - \boldsymbol{B}^2) : \boldsymbol{D} \qquad \dot{B}_{\mathrm{III}} = 2\,B_{\mathrm{III}}\,\boldsymbol{G} : \boldsymbol{D}$$

$$(\boldsymbol{B} : \boldsymbol{N}_t)^{\cdot} = \big(4\,\mathrm{sym}(\boldsymbol{N}_t \cdot \boldsymbol{B}) - 2\,(\boldsymbol{B} : \boldsymbol{N}_t)\boldsymbol{N}_t\big) : \boldsymbol{D}$$

$$(\boldsymbol{B}^2 : \boldsymbol{N}_t)^{\cdot} = \big(4\,\mathrm{sym}(\boldsymbol{N}_t \cdot \boldsymbol{B}^2) - 2\,(\boldsymbol{B}^2 : \boldsymbol{N}_t)\boldsymbol{N}_t + 2\,(\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{N}_t \cdot \boldsymbol{B})\big) : \boldsymbol{D}$$

$$\dot{K}_v = K_v\,\boldsymbol{G} : \boldsymbol{D} \qquad \dot{\delta} = \Big(\frac{\delta^{1/3}}{K_v{}^{2/3}}\boldsymbol{B} - \delta\,\boldsymbol{G}\Big) : \boldsymbol{D}$$ (rappel : $\delta$ abréviation de $\delta^s_{max}$)

$$\dot{a} = \Big(\frac{\boldsymbol{B} : \boldsymbol{N}_t}{K_v{}^{2/3}}\Big)^{\cdot} = \Big(-\frac{2a}{3}\boldsymbol{G} + \frac{4}{K_v{}^{2/3}}\,\mathrm{sym}(\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{N}_t) - 2\,a\boldsymbol{N}_t\Big) : \boldsymbol{D}$$

$\cdots$ (exercices : autres tenseurs de déformation ou autres invariants cinématiques)

> Les tenseurs symétriques $\boldsymbol{S}_j$ sont des fonctions de la déformation et des éventuelles directions d'anisotropie.

# Rappels d'élasticité (élasticité générique)

# Rappels d'élasticité (élasticité générique)



## Conditions nécessaires et suffisantes de l'élasticité :

# Rappels d'élasticité (élasticité générique)

Variables d'état

Rappel d'élasticité

Inélasticité monoconst.

## Conditions nécessaires et suffisantes de l'élasticité :

1. Absence de variable d'état mnésique. (seulement $\{T, I_1, \cdots, I_m\}$)

# Rappels d'élasticité (élasticité générique)



## Conditions nécessaires et suffisantes de l'élasticité :

1. Absence de variable d'état mnésique. (seulement $\{T, I_1, \cdots, I_m\}$)
2. Dans toute évolution $\Phi_{int} = 0$. (pas de frottement, mais $\Phi_{th} \geqslant 0$)

# Rappels d'élasticité (élasticité générique)



## Conditions nécessaires et suffisantes de l'élasticité :

1. Absence de variable d'état mnésique. (seulement $\{T, I_1, \cdots, I_m\}$)
2. Dans toute évolution $\Phi_{int} = 0$. (pas de frottement, mais $\Phi_{th} \geqslant 0$)
3. Le tenseur des contraintes est une fonction d'état.

# Rappels d'élasticité (élasticité générique)



## Conditions nécessaires et suffisantes de l'élasticité :

1. Absence de variable d'état mnésique. (seulement $\{T, I_1, \cdots, I_m\}$)
2. Dans toute évolution $\Phi_{int} = 0$. (pas de frottement, mais $\Phi_{th} \geqslant 0$)
3. Le tenseur des contraintes est une fonction d'état.

$$\forall \dot{T}\,\forall \boldsymbol{D}, \quad 0 = -\rho\,(\dot{\psi}^m + s^m\,\dot{T}) + \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{D}$$

# Rappels d'élasticité (élasticité générique)



## Conditions nécessaires et suffisantes de l'élasticité :

1. Absence de variable d'état mnésique. (seulement $\{T, I_1, \cdots, I_m\}$)
2. Dans toute évolution $\Phi_{int} = 0$. (pas de frottement, mais $\Phi_{th} \geqslant 0$)
3. Le tenseur des contraintes est une fonction d'état.

$$\forall \dot{T}\, \forall \boldsymbol{D}, \quad 0 = -\rho\,(\dot{\psi}^m + s^m\,\dot{T}) + \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{D}$$ (dissipation intrinsèque nulle)

# Rappels d'élasticité (élasticité générique)



## Conditions nécessaires et suffisantes de l'élasticité :

1. Absence de variable d'état mnésique. (seulement $\{T, I_1, \cdots, I_m\}$)
2. Dans toute évolution $\Phi_{int} = 0$. (pas de frottement, mais $\Phi_{th} \geqslant 0$)
3. Le tenseur des contraintes est une fonction d'état.

$$\forall \dot{T}\, \forall \boldsymbol{D}, \quad \begin{aligned} 0 &= -\rho\,(\dot{\psi}^m + s^m\,\dot{T}) + \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{D} \\ &= -\rho\,(\partial_T \bar{f}_\psi\,\dot{T} + \textstyle\sum_{j=1}^m \partial_{I_j} \bar{f}_\psi\,\dot{I}_j + \end{aligned}$$

(dissipation intrinsèque nulle)

# Rappels d'élasticité (élasticité générique)



## Conditions nécessaires et suffisantes de l'élasticité :

1. Absence de variable d'état mnésique. (seulement $\{T, I_1, \cdots, I_m\}$)
2. Dans toute évolution $\Phi_{int} = 0$. (pas de frottement, mais $\Phi_{th} \geqslant 0$)
3. Le tenseur des contraintes est une fonction d'état.

$$\forall \dot{T}\, \forall \boldsymbol{D}, \quad 0 = -\rho\,(\dot{\psi}^m + s^m\,\dot{T}) + \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{D} \qquad \text{(dissipation intrinsèque nulle)}$$
$$= -\rho\,(\partial_T \bar{f}_\psi\,\dot{T} + \textstyle\sum_{j=1}^{m} \partial_{I_j} \bar{f}_\psi\,\dot{I}_j + \bar{f}_s\,\dot{T}) +$$

# Rappels d'élasticité (élasticité générique)



## Conditions nécessaires et suffisantes de l'élasticité :

1. Absence de variable d'état mnésique. (seulement $\{T, I_1, \cdots, I_m\}$)
2. Dans toute évolution $\Phi_{int} = 0$. (pas de frottement, mais $\Phi_{th} \geqslant 0$)
3. Le tenseur des contraintes est une fonction d'état.

$$\begin{aligned} \forall \dot{T}\ \forall \boldsymbol{D}, \quad 0 &= -\rho\,(\dot{\psi}^m + s^m\,\dot{T}) + \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{D} \qquad \text{(dissipation intrinsèque nulle)} \\ &= -\rho\,(\partial_T \overline{f}_\psi\,\dot{T} + \textstyle\sum_{j=1}^m \partial_{I_j} \overline{f}_\psi\,\dot{I}_j + \overline{f}_s\,\dot{T}) + \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{D} \end{aligned}$$

# Rappels d'élasticité (élasticité générique)



## Conditions nécessaires et suffisantes de l'élasticité :

1. Absence de variable d'état mnésique. (seulement $\{T, I_1, \cdots, I_m\}$)
2. Dans toute évolution $\Phi_{int} = 0$. (pas de frottement, mais $\Phi_{th} \geqslant 0$)
3. Le tenseur des contraintes est une fonction d'état.

$$\begin{aligned}
\forall \dot{T}\, \forall \boldsymbol{D}, \quad 0 &= -\rho\,(\dot{\psi}^m + s^m\,\dot{T}) + \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{D} \qquad \text{(dissipation intrinsèque nulle)} \\
&= -\rho\,(\partial_T \bar{f}_\psi\,\dot{T} + \textstyle\sum_{j=1}^m \partial_{I_j}\bar{f}_\psi\,\dot{I}_j + \bar{f}_s\,\dot{T}) + \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{D} \\
&= -\rho\,(\partial_T \bar{f}_\psi\,\dot{T} + \textstyle\sum_{j=1}^m \partial_{I_j}\bar{f}_\psi\,\boldsymbol{S}_j : \boldsymbol{D} + \bar{f}_s\,\dot{T}) + \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{D}
\end{aligned}$$

# Rappels d'élasticité (élasticité générique)



## Conditions nécessaires et suffisantes de l'élasticité :

1. Absence de variable d'état mnésique. (seulement $\{T, I_1, \cdots, I_m\}$)
2. Dans toute évolution $\Phi_{int} = 0$. (pas de frottement, mais $\Phi_{th} \geqslant 0$)
3. Le tenseur des contraintes est une fonction d'état.

$$\begin{aligned}
\forall \dot{T}\, \forall \boldsymbol{D}, \quad 0 &= -\rho\,(\dot{\psi}^m + s^m\,\dot{T}) + \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{D} \qquad \text{(dissipation intrinsèque nulle)} \\
&= -\rho\,(\partial_T \bar{f}_\psi\,\dot{T} + \textstyle\sum_{j=1}^m \partial_{I_j} \bar{f}_\psi\, \dot{I}_j + \bar{f}_s\,\dot{T}) + \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{D} \\
&= -\rho\,(\partial_T \bar{f}_\psi\,\dot{T} + \textstyle\sum_{j=1}^m \partial_{I_j} \bar{f}_\psi\, \boldsymbol{S}_j : \boldsymbol{D} + \bar{f}_s\,\dot{T}) + \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{D} \\
&= -\rho\,(\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s)\,\dot{T} +
\end{aligned}$$

# Rappels d'élasticité (élasticité générique)



## Conditions nécessaires et suffisantes de l'élasticité :

1. Absence de variable d'état mnésique. (seulement $\{T, I_1, \cdots, I_m\}$)
2. Dans toute évolution $\Phi_{int} = 0$. (pas de frottement, mais $\Phi_{th} \geqslant 0$)
3. Le tenseur des contraintes est une fonction d'état.

$$\begin{aligned}
\forall \dot{T}\, \forall \boldsymbol{D}, \quad 0 &= -\rho\,(\dot{\psi}^m + s^m\,\dot{T}) + \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{D} \qquad \text{(dissipation intrinsèque nulle)}\\
&= -\rho\,(\partial_T \bar{f}_\psi\,\dot{T} + \textstyle\sum_{j=1}^m \partial_{I_j} \bar{f}_\psi\,\dot{I}_j + \bar{f}_s\,\dot{T}) + \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{D}\\
&= -\rho\,(\partial_T \bar{f}_\psi\,\dot{T} + \textstyle\sum_{j=1}^m \partial_{I_j} \bar{f}_\psi\,\boldsymbol{S}_j : \boldsymbol{D} + \bar{f}_s\,\dot{T}) + \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{D}\\
&= -\rho\,(\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s)\,\dot{T} + \Big(-\rho\,\textstyle\sum_{j=1}^m \partial_{I_j} \bar{f}_\psi\,\boldsymbol{S}_j + \boldsymbol{\sigma}\Big) : \boldsymbol{D}
\end{aligned}$$

# Rappels d'élasticité (élasticité générique)



## Conditions nécessaires et suffisantes de l'élasticité :

1. Absence de variable d'état mnésique. (seulement $\{T, I_1, \cdots, I_m\}$)
2. Dans toute évolution $\Phi_{int} = 0$. (pas de frottement, mais $\Phi_{th} \geqslant 0$)
3. Le tenseur des contraintes est une fonction d'état.

$$\begin{aligned}
\forall \dot{T}\ \forall \boldsymbol{D}, \quad 0 &= -\rho\,(\dot{\psi}^m + s^m\,\dot{T}) + \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{D} \qquad \text{(dissipation intrinsèque nulle)}\\
&= -\rho\,(\partial_T \overline{f}_\psi\,\dot{T} + \textstyle\sum_{j=1}^m \partial_{I_j}\overline{f}_\psi\,\dot{I}_j + \overline{f}_s\,\dot{T}) + \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{D}\\
&= -\rho\,(\partial_T \overline{f}_\psi\,\dot{T} + \textstyle\sum_{j=1}^m \partial_{I_j}\overline{f}_\psi\,\boldsymbol{S}_j : \boldsymbol{D} + \overline{f}_s\,\dot{T}) + \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{D}\\
&= -\rho\,(\partial_T \overline{f}_\psi + \overline{f}_s)\,\dot{T} + \big(-\rho \textstyle\sum_{j=1}^m \partial_{I_j}\overline{f}_\psi\,\boldsymbol{S}_j + \boldsymbol{\sigma}\big) : \boldsymbol{D}
\end{aligned}$$

$$\forall \dot{T},\ \Phi_{int} = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial_T \overline{f}_\psi + \overline{f}_s = 0$$

# Rappels d'élasticité (élasticité générique)



## Conditions nécessaires et suffisantes de l'élasticité :

1. Absence de variable d'état mnésique. (seulement $\{T, I_1, \cdots, I_m\}$)
2. Dans toute évolution $\Phi_{int} = 0$. (pas de frottement, mais $\Phi_{th} \geqslant 0$)
3. Le tenseur des contraintes est une fonction d'état.

$$\begin{aligned}
\forall \dot{T}\, \forall \boldsymbol{D}, \quad 0 &= -\rho\,(\dot{\psi}^m + s^m\,\dot{T}) + \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{D} \qquad \text{(dissipation intrinsèque nulle)} \\
&= -\rho\,(\partial_T \overline{f}_\psi\,\dot{T} + \textstyle\sum_{j=1}^m \partial_{I_j} \overline{f}_\psi\,\dot{I}_j + \overline{f}_s\,\dot{T}) + \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{D} \\
&= -\rho\,(\partial_T \overline{f}_\psi\,\dot{T} + \textstyle\sum_{j=1}^m \partial_{I_j} \overline{f}_\psi\,\boldsymbol{S}_j : \boldsymbol{D} + \overline{f}_s\,\dot{T}) + \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{D} \\
&= -\rho\,(\partial_T \overline{f}_\psi + \overline{f}_s)\,\dot{T} + \Big(-\rho\,\textstyle\sum_{j=1}^m \partial_{I_j} \overline{f}_\psi\,\boldsymbol{S}_j + \boldsymbol{\sigma}\Big) : \boldsymbol{D}
\end{aligned}$$

$$\forall \dot{T},\ \Phi_{int} = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial_T \overline{f}_\psi + \overline{f}_s = 0 \qquad \text{(relation de Helmholtz)}$$

# Rappels d'élasticité (élasticité générique)



## Conditions nécessaires et suffisantes de l'élasticité :

1. Absence de variable d'état mnésique. (seulement $\{T, I_1, \cdots, I_m\}$)
2. Dans toute évolution $\Phi_{int} = 0$. (pas de frottement, mais $\Phi_{th} \geqslant 0$)
3. Le tenseur des contraintes est une fonction d'état.

$$\forall \dot{T}\ \forall \boldsymbol{D}, \quad 0 = -\rho\,(\dot{\psi}^m + s^m\,\dot{T}) + \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{D} \qquad \text{(dissipation intrinsèque nulle)}$$

$$= -\rho\,(\partial_T \bar{f}_\psi\,\dot{T} + \textstyle\sum_{j=1}^m \partial_{I_j} \bar{f}_\psi\,\dot{I}_j + \bar{f}_s\,\dot{T}) + \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{D}$$

$$= -\rho\,(\partial_T \bar{f}_\psi\,\dot{T} + \textstyle\sum_{j=1}^m \partial_{I_j} \bar{f}_\psi\,\boldsymbol{S}_j : \boldsymbol{D} + \bar{f}_s\,\dot{T}) + \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{D}$$

$$= -\rho\,(\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s)\,\dot{T} + \Big(-\rho\,\textstyle\sum_{j=1}^m \partial_{I_j} \bar{f}_\psi\,\boldsymbol{S}_j + \boldsymbol{\sigma}\Big) : \boldsymbol{D}$$

$$\forall \dot{T}, \ \Phi_{int} = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s = 0 \qquad \text{(relation de Helmholtz)}$$

$$\forall \boldsymbol{D}, \ \Phi_{int} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\sigma} = \rho\,\textstyle\sum_{j=1}^m \partial_{I_j} \bar{f}_\psi\,\boldsymbol{S}_j$$

# Rappels d'élasticité (élasticité générique)



## Conditions nécessaires et suffisantes de l'élasticité :

1. Absence de variable d'état mnésique. (seulement $\{T, I_1, \cdots, I_m\}$)
2. Dans toute évolution $\Phi_{int} = 0$. (pas de frottement, mais $\Phi_{th} \geqslant 0$)
3. Le tenseur des contraintes est une fonction d'état.

$$\begin{aligned}
\forall \dot{T}\, \forall \boldsymbol{D}, \quad 0 &= -\rho\,(\dot{\psi}^m + s^m\,\dot{T}) + \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{D} \qquad \text{(dissipation intrinsèque nulle)}\\
&= -\rho\,(\partial_T \bar{f}_\psi\, \dot{T} + \textstyle\sum_{j=1}^m \partial_{I_j} \bar{f}_\psi\, \dot{I}_j + \bar{f}_s\, \dot{T}) + \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{D}\\
&= -\rho\,(\partial_T \bar{f}_\psi\, \dot{T} + \textstyle\sum_{j=1}^m \partial_{I_j} \bar{f}_\psi\, \boldsymbol{S}_j : \boldsymbol{D} + \bar{f}_s\, \dot{T}) + \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{D}\\
&= -\rho\,(\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s)\,\dot{T} + \Big(-\rho\,\textstyle\sum_{j=1}^m \partial_{I_j} \bar{f}_\psi\, \boldsymbol{S}_j + \boldsymbol{\sigma}\Big) : \boldsymbol{D}
\end{aligned}$$

$$\forall \dot{T},\ \Phi_{int} = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s = 0 \qquad \text{(relation de Helmholtz)}$$

$$\forall \boldsymbol{D},\ \Phi_{int} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\sigma} = \rho\,\textstyle\sum_{j=1}^m \partial_{I_j} \bar{f}_\psi\, \boldsymbol{S}_j \qquad \text{(comport. mécanique élastique)}$$

# Rappels d'élasticité (élasticité générique)



## Conditions nécessaires et suffisantes de l'élasticité :

1. Absence de variable d'état mnésique. (seulement $\{T, I_1, \cdots, I_m\}$)
2. Dans toute évolution $\Phi_{int} = 0$. (pas de frottement, mais $\Phi_{th} \geqslant 0$)
3. Le tenseur des contraintes est une fonction d'état.

$$\begin{aligned}
\forall \dot{T}\, \forall \boldsymbol{D}, \quad 0 &= -\rho\,(\dot{\psi}^m + s^m\,\dot{T}) + \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{D} \qquad \text{(dissipation intrinsèque nulle)}\\
&= -\rho\,(\partial_T \bar{f}_\psi\,\dot{T} + \textstyle\sum_{j=1}^m \partial_{I_j} \bar{f}_\psi\,\dot{I}_j + \bar{f}_s\,\dot{T}) + \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{D}\\
&= -\rho\,(\partial_T \bar{f}_\psi\,\dot{T} + \textstyle\sum_{j=1}^m \partial_{I_j} \bar{f}_\psi\,\boldsymbol{S}_j : \boldsymbol{D} + \bar{f}_s\,\dot{T}) + \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{D}\\
&= -\rho\,(\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s)\,\dot{T} + \big(-\rho\,\textstyle\sum_{j=1}^m \partial_{I_j} \bar{f}_\psi\,\boldsymbol{S}_j + \boldsymbol{\sigma}\big) : \boldsymbol{D}
\end{aligned}$$

$$\forall \dot{T},\ \Phi_{int} = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s = 0 \qquad \text{(relation de Helmholtz)}$$

$$\forall \boldsymbol{D},\ \Phi_{int} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\sigma} = \rho\,\textstyle\sum_{j=1}^m \partial_{I_j} \bar{f}_\psi\,\boldsymbol{S}_j \qquad \text{(comport. mécanique élastique)}$$

Cette forme générique du comportement mécanique élastique est valable quel que soit le nombre d'anisotropies.

# Rappels d'élasticité (élasticité générique)

Variables d'état

Rappel d'élasticité

Inélasticité monoconst.

## Conditions nécessaires et suffisantes de l'élasticité :

1. Absence de variable d'état mnésique. (seulement $\{T, I_1, \cdots, I_m\}$)
2. Dans toute évolution $\Phi_{int} = 0$. (pas de frottement, mais $\Phi_{th} \geqslant 0$)
3. Le tenseur des contraintes est une fonction d'état.

$$\begin{aligned}
\forall \dot{T}\, \forall \boldsymbol{D}, \quad 0 &= -\rho\,(\dot{\psi}^m + s^m\,\dot{T}) + \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{D} \quad \text{(dissipation intrinsèque nulle)} \\
&= -\rho\,(\partial_T \bar{f}_\psi\,\dot{T} + \textstyle\sum_{j=1}^m \partial_{I_j} \bar{f}_\psi\,\dot{I}_j + \bar{f}_s\,\dot{T}) + \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{D} \\
&= -\rho\,(\partial_T \bar{f}_\psi\,\dot{T} + \textstyle\sum_{j=1}^m \partial_{I_j} \bar{f}_\psi\,\boldsymbol{S}_j : \boldsymbol{D} + \bar{f}_s\,\dot{T}) + \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{D} \\
&= -\rho\,(\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s)\,\dot{T} + \Big(-\rho\,\textstyle\sum_{j=1}^m \partial_{I_j} \bar{f}_\psi\,\boldsymbol{S}_j + \boldsymbol{\sigma}\Big) : \boldsymbol{D}
\end{aligned}$$

$$\forall \dot{T},\ \Phi_{int} = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s = 0 \qquad \text{(relation de Helmholtz)}$$

$$\forall \boldsymbol{D},\ \Phi_{int} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\sigma} = \rho\,\textstyle\sum_{j=1}^m \partial_{I_j} \bar{f}_\psi\,\boldsymbol{S}_j \qquad \text{(comport. mécanique élastique)}$$

> Cette forme générique du comportement mécanique élastique est valable quel que soit le nombre d'anisotropies.

La fonction d'état tensorielle $\rho\,\sum_{j=1}^m \partial_{I_j} \bar{f}_\psi\,\boldsymbol{S}_j$ va réapparaître en inélasticité.

# Inélasticité (solides monoconstituants)

# Inélasticité (solides monoconstituants)



## Définition

Un modèle de comportement est inélastique s'il viole au moins une des conditions de l'élasticité.

# Inélasticité (solides monoconstituants)



## Définition

Un modèle de comportement est inélastique s'il viole au moins une des conditions de l'élasticité.

**Dans les modèles de comportement inélastiques :**

# Inélasticité (solides monoconstituants)



**Définition**

Un modèle de comportement est inélastique s'il viole au moins une des conditions de l'élasticité.

## Dans les modèles de comportement inélastiques :

- soit il y a au moins une variable d'état mnésique,

# Inélasticité (solides monoconstituants)



## Définition

Un modèle de comportement est inélastique s'il viole au moins une des conditions de l'élasticité.

### Dans les modèles de comportement inélastiques :

- soit il y a au moins une variable d'état mnésique,
- soit la dissipation intrinsèque n'est pas nulle,

# Inélasticité (solides monoconstituants)



## Définition

Un modèle de comportement est inélastique s'il viole au moins une des conditions de l'élasticité.

### Dans les modèles de comportement inélastiques :

- soit il y a au moins une variable d'état mnésique,
- soit la dissipation intrinsèque n'est pas nulle,
- soit le tenseur des contraintes n'est pas une fonction d'état,

# Inélasticité (solides monoconstituants)



## Définition

Un modèle de comportement est inélastique s'il viole au moins une des conditions de l'élasticité.

## Dans les modèles de comportement inélastiques :

- soit il y a au moins une variable d'état mnésique,
- soit la dissipation intrinsèque n'est pas nulle,
- soit le tenseur des contraintes n'est pas une fonction d'état,
- soit plusieurs de ces éventualités.

# Inélasticité (solides monoconstituants)



## Définition

Un modèle de comportement est inélastique s'il viole au moins une des conditions de l'élasticité.

### Dans les modèles de comportement inélastiques :

- soit il y a au moins une variable d'état mnésique,
- soit la dissipation intrinsèque n'est pas nulle,
- soit le tenseur des contraintes n'est pas une fonction d'état,
- soit plusieurs de ces éventualités.

On peut donc contruire une grande diversité de modèles de comportement inélastiques.

# Inélasticité (solides monoconstituants)



## Définition

Un modèle de comportement est inélastique s'il viole au moins une des conditions de l'élasticité.

## Dans les modèles de comportement inélastiques :

- soit il y a au moins une variable d'état mnésique,
- soit la dissipation intrinsèque n'est pas nulle,
- soit le tenseur des contraintes n'est pas une fonction d'état,
- soit plusieurs de ces éventualités.

On peut donc contruire une grande diversité de modèles de comportement inélastiques.

## Plan pour la suite :

On envisagera des modèles de complexité croissante

# Inélasticité (solides monoconstituants)



## Définition

Un modèle de comportement est inélastique s'il viole au moins une des conditions de l'élasticité.

### Dans les modèles de comportement inélastiques :

- soit il y a au moins une variable d'état mnésique,
- soit la dissipation intrinsèque n'est pas nulle,
- soit le tenseur des contraintes n'est pas une fonction d'état,
- soit plusieurs de ces éventualités.

On peut donc contruire une grande diversité de modèles de comportement inélastiques.

### Plan pour la suite :

On envisagera des modèles de complexité croissante en augmentant le nombre de variables mnésiques, à partir de 0.

Seconde partie

# Inélasticité sans variable mnésique

# Variables d'état et fonctions d'état

# Variables d'état et fonctions d'état



## Variables d'état :

# Variables d'état et fonctions d'état



## Variables d'état :

1. La température $T$.

# Variables d'état et fonctions d'état



## Variables d'état :

1. La température $T$. (thermodynamique)

# Variables d'état et fonctions d'état



## Variables d'état :

1. La température $T$. (thermodynamique)
2. Un tenseur de déformation objectif $\boldsymbol{X}$.

# Variables d'état et fonctions d'état



## Variables d'état :

1. La température $T$. (thermodynamique)
2. Un tenseur de déformation objectif $\boldsymbol{X}$. (solide déformable)

# Variables d'état et fonctions d'état



## Variables d'état :

1. La température $T$. (thermodynamique)
2. Un tenseur de déformation objectif $\boldsymbol{X}$. (solide déformable)
3. D'éventuelles directions d'anisotropie $\boldsymbol{N}_t^{\bullet}$.

# Variables d'état et fonctions d'état



## Variables d'état :

1. La température $T$. (thermodynamique)
2. Un tenseur de déformation objectif $\boldsymbol{X}$. (solide déformable)
3. D'éventuelles directions d'anisotropie $\boldsymbol{N}_t^\bullet$.

## Fonctions d'état :

# Variables d'état et fonctions d'état



## Variables d'état :

1. La température $T$. (thermodynamique)
2. Un tenseur de déformation objectif $\boldsymbol{X}$. (solide déformable)
3. D'éventuelles directions d'anisotropie $\boldsymbol{N}_t^\bullet$.

## Fonctions d'état :

- Énergie interne massique : (1er principe de la thermodynamique)

# Variables d'état et fonctions d'état



## Variables d'état :

1. La température $T$. (thermodynamique)
2. Un tenseur de déformation objectif $\boldsymbol{X}$. (solide déformable)
3. D'éventuelles directions d'anisotropie $\boldsymbol{N}_t^{\bullet}$.

## Fonctions d'état :

- Énergie interne massique : (1er principe de la thermodynamique)
  $e^m = f_e(T, \boldsymbol{X}, \boldsymbol{N}_t^{\bullet})$

# Variables d'état et fonctions d'état



## Variables d'état :

1. La température $T$. (thermodynamique)
2. Un tenseur de déformation objectif $\boldsymbol{X}$. (solide déformable)
3. D'éventuelles directions d'anisotropie $\boldsymbol{N}_t^\bullet$.

## Fonctions d'état :

- Énergie interne massique : (1er principe de la thermodynamique)

$$e^m = f_e(T, \boldsymbol{X}, \boldsymbol{N}_t^\bullet) = \bar{f}_e(T, I_1, \cdots, I_m)$$

# Variables d'état et fonctions d'état



## Variables d'état :

1. La température $T$. (thermodynamique)
2. Un tenseur de déformation objectif $\boldsymbol{X}$. (solide déformable)
3. D'éventuelles directions d'anisotropie $\boldsymbol{N}_t^\bullet$.

## Fonctions d'état :

- Énergie interne massique : (1er principe de la thermodynamique)
  $$e^m = f_e(T, \boldsymbol{X}, \boldsymbol{N}_t^\bullet) = \overline{f}_e(T, I_1, \cdots, I_m)$$
- Entropie massique :

# Variables d'état et fonctions d'état



## Variables d'état :

1. La température $T$. (thermodynamique)
2. Un tenseur de déformation objectif $\boldsymbol{X}$. (solide déformable)
3. D'éventuelles directions d'anisotropie $\boldsymbol{N}_t^{\bullet}$.

## Fonctions d'état :

- Énergie interne massique : (1er principe de la thermodynamique)
  $$e^m = f_e(T, \boldsymbol{X}, \boldsymbol{N}_t^{\bullet}) = \overline{f}_e(T, I_1, \cdots, I_m)$$
- Entropie massique : (2ème principe de la thermodynamique)

# Variables d'état et fonctions d'état



## Variables d'état :

1. La température $T$. (thermodynamique)
2. Un tenseur de déformation objectif $\boldsymbol{X}$. (solide déformable)
3. D'éventuelles directions d'anisotropie $\boldsymbol{N}_t^{\bullet}$.

## Fonctions d'état :

- Énergie interne massique : (1er principe de la thermodynamique)
  $$e^m = f_e(T, \boldsymbol{X}, \boldsymbol{N}_t^{\bullet}) = \bar{f}_e(T, I_1, \cdots, I_m)$$
- Entropie massique : (2ème principe de la thermodynamique)
  $$s^m = f_s(T, \boldsymbol{X}, \boldsymbol{N}_t^{\bullet})$$

# Variables d'état et fonctions d'état



## Variables d'état :

1. La température $T$. (thermodynamique)
2. Un tenseur de déformation objectif $\boldsymbol{X}$. (solide déformable)
3. D'éventuelles directions d'anisotropie $\boldsymbol{N}_t^\bullet$.

## Fonctions d'état :

- Énergie interne massique : (1er principe de la thermodynamique)
  $e^m = f_e(T, \boldsymbol{X}, \boldsymbol{N}_t^\bullet) = \bar{f}_e(T, I_1, \cdots, I_m)$
- Entropie massique : (2ème principe de la thermodynamique)
  $s^m = f_s(T, \boldsymbol{X}, \boldsymbol{N}_t^\bullet) = \bar{f}_s(T, I_1, \cdots, I_m)$

# Variables d'état et fonctions d'état



## Variables d'état :

1. La température $T$. (thermodynamique)
2. Un tenseur de déformation objectif $\boldsymbol{X}$. (solide déformable)
3. D'éventuelles directions d'anisotropie $\boldsymbol{N}_t^{\bullet}$.

## Fonctions d'état :

- Énergie interne massique : (1er principe de la thermodynamique)
  $$e^m = f_e(T, \boldsymbol{X}, \boldsymbol{N}_t^{\bullet}) = \bar{f}_e(T, I_1, \cdots, I_m)$$
- Entropie massique : (2ème principe de la thermodynamique)
  $$s^m = f_s(T, \boldsymbol{X}, \boldsymbol{N}_t^{\bullet}) = \bar{f}_s(T, I_1, \cdots, I_m)$$
- Énergie libre massique de Helmholtz :

# Variables d'état et fonctions d'état



## Variables d'état :

1. La température $T$. (thermodynamique)
2. Un tenseur de déformation objectif $\boldsymbol{X}$. (solide déformable)
3. D'éventuelles directions d'anisotropie $\boldsymbol{N}_t^{\bullet}$.

## Fonctions d'état :

- Énergie interne massique : (1er principe de la thermodynamique)
  $e^m = f_e(T, \boldsymbol{X}, \boldsymbol{N}_t^{\bullet}) = \bar{f}_e(T, I_1, \cdots, I_m)$
- Entropie massique : (2ème principe de la thermodynamique)
  $s^m = f_s(T, \boldsymbol{X}, \boldsymbol{N}_t^{\bullet}) = \bar{f}_s(T, I_1, \cdots, I_m)$
- Énergie libre massique de Helmholtz : (fonction d'état auxilliaire)

# Variables d'état et fonctions d'état



## Variables d'état :

1. La température $T$. (thermodynamique)
2. Un tenseur de déformation objectif $\boldsymbol{X}$. (solide déformable)
3. D'éventuelles directions d'anisotropie $\boldsymbol{N}_t^\bullet$.

## Fonctions d'état :

- Énergie interne massique : (1er principe de la thermodynamique)
  $$e^m = f_e(T, \boldsymbol{X}, \boldsymbol{N}_t^\bullet) = \bar{f}_e(T, I_1, \cdots, I_m)$$
- Entropie massique : (2ème principe de la thermodynamique)
  $$s^m = f_s(T, \boldsymbol{X}, \boldsymbol{N}_t^\bullet) = \bar{f}_s(T, I_1, \cdots, I_m)$$
- Énergie libre massique de Helmholtz : (fonction d'état auxilliaire)
  $$\psi^m = e^m - T\, s^m$$

# Variables d'état et fonctions d'état



## Variables d'état :

1. La température $T$. (thermodynamique)
2. Un tenseur de déformation objectif $\boldsymbol{X}$. (solide déformable)
3. D'éventuelles directions d'anisotropie $\boldsymbol{N}_t^\bullet$.

## Fonctions d'état :

- Énergie interne massique : (1er principe de la thermodynamique)
  $$e^m = f_e(T,\boldsymbol{X},\boldsymbol{N}_t^\bullet) = \overline{f}_e(T,I_1,\cdots,I_m)$$
- Entropie massique : (2ème principe de la thermodynamique)
  $$s^m = f_s(T,\boldsymbol{X},\boldsymbol{N}_t^\bullet) = \overline{f}_s(T,I_1,\cdots,I_m)$$
- Énergie libre massique de Helmholtz : (fonction d'état auxilliaire)
  $$\psi^m = e^m - T\,s^m = f_\psi(T,\boldsymbol{X},\boldsymbol{N}_t^\bullet)$$

# Variables d'état et fonctions d'état



## Variables d'état :

1. La température $T$. (thermodynamique)
2. Un tenseur de déformation objectif $\boldsymbol{X}$. (solide déformable)
3. D'éventuelles directions d'anisotropie $\boldsymbol{N}_t^\bullet$.

## Fonctions d'état :

- Énergie interne massique : (1er principe de la thermodynamique)
  $$e^m = f_e(T, \boldsymbol{X}, \boldsymbol{N}_t^\bullet) = \bar{f}_e(T, I_1, \cdots, I_m)$$
- Entropie massique : (2ème principe de la thermodynamique)
  $$s^m = f_s(T, \boldsymbol{X}, \boldsymbol{N}_t^\bullet) = \bar{f}_s(T, I_1, \cdots, I_m)$$
- Énergie libre massique de Helmholtz : (fonction d'état auxilliaire)
  $$\psi^m = e^m - T\,s^m = f_\psi(T, \boldsymbol{X}, \boldsymbol{N}_t^\bullet) = \bar{f}_\psi(T, I_1, \cdots, I_m)$$

# Variables d'état et fonctions d'état



## Variables d'état :

1. La température $T$. (thermodynamique)
2. Un tenseur de déformation objectif $\boldsymbol{X}$. (solide déformable)
3. D'éventuelles directions d'anisotropie $\boldsymbol{N}_t^\bullet$.

## Fonctions d'état :

- Énergie interne massique : (1er principe de la thermodynamique)
  $$e^m = f_e(T, \boldsymbol{X}, \boldsymbol{N}_t^\bullet) = \bar{f}_e(T, I_1, \cdots, I_m)$$
- Entropie massique : (2ème principe de la thermodynamique)
  $$s^m = f_s(T, \boldsymbol{X}, \boldsymbol{N}_t^\bullet) = \bar{f}_s(T, I_1, \cdots, I_m)$$
- Énergie libre massique de Helmholtz : (fonction d'état auxilliaire)
  $$\psi^m = e^m - T\, s^m = f_\psi(T, \boldsymbol{X}, \boldsymbol{N}_t^\bullet) = \bar{f}_\psi(T, I_1, \cdots, I_m)$$

**Rappel :** pour les variables d'état cinématiques : $\dot{I}_j = \boldsymbol{S}_j : \boldsymbol{D}$

# Comportement mécanique

# Comportement mécanique

## Dissipation intrinsèque :

# Comportement mécanique

## Dissipation intrinsèque :

$\forall \dot{T} \, \forall \boldsymbol{D},$

# Comportement mécanique

## Dissipation intrinsèque :

$$\forall \dot{T}\, \forall \boldsymbol{D}, \quad \Phi_{int} = -\rho\left(\dot{\psi}^m + s^m\, \dot{T}\right) + \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{D} \geqslant 0$$

# Comportement mécanique



## Dissipation intrinsèque :

$$\forall \dot{T}\, \forall \boldsymbol{D}, \quad \Phi_{int} = -\rho \left( \dot{\psi}^m + s^m \dot{T} \right) + \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{D} \geqslant 0$$ (2e principe, Clausius-Duhem)

# Comportement mécanique

Variables et fonctions d'état

Loi de comportement

Synthèse

## Dissipation intrinsèque :

$$\forall \dot{T}\, \forall \boldsymbol{D}, \quad \Phi_{int} = -\rho\left(\dot{\psi}^m + s^m\,\dot{T}\right) + \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{D} \geqslant 0 \quad \text{(2}^{\text{e}}\text{ principe, Clausius-Duhem)}$$

$\dots$

# Comportement mécanique

Variables et fonctions d'état

Loi de comportement

Synthèse

## Dissipation intrinsèque :

$$\forall \dot{T}\,\forall \boldsymbol{D}, \quad \Phi_{int} = -\rho\left(\dot{\psi}^m + s^m\,\dot{T}\right) + \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{D} \geqslant 0$$ (2[e] principe, Clausius-Duhem)

$$\ldots \qquad (\psi^m = \bar{f}_\psi(T, I_1, \cdots, I_m),$$

# Comportement mécanique

Variables et fonctions d'état

Loi de comportement

Synthèse

## Dissipation intrinsèque :

$$\forall \dot{T}\, \forall \boldsymbol{D}, \quad \Phi_{int} = -\rho\left(\dot{\psi}^m + s^m\,\dot{T}\right) + \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{D} \geqslant 0$$ (2e principe, Clausius-Duhem)

$\dots$ $(\psi^m = \bar{f}_\psi(T, I_1, \cdots, I_m)$, mêmes variables d'état qu'en élasticité)

# Comportement mécanique

## Dissipation intrinsèque :

$$\forall \dot{T}\,\forall \boldsymbol{D},\qquad \Phi_{int} = -\rho\,(\dot{\psi}^m + s^m\,\dot{T}) + \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{D} \geqslant 0$$ (2[e] principe, Clausius-Duhem)

$\cdots$ $(\psi^m = \bar{f}_\psi(T, I_1, \cdots, I_m)$, mêmes variables d'état qu'en élasticité)

$$\Phi_{int} = -\rho\,(\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s)\,\dot{T} + \Big(-\rho\,\textstyle\sum_{j=1}^m \partial_{I_j}\bar{f}_\psi\,\boldsymbol{S}_j + \boldsymbol{\sigma}\Big) : \boldsymbol{D} \geqslant 0$$

# Comportement mécanique

Variables et fonctions d'état

Loi de comportement

Synthèse

## Dissipation intrinsèque :

$\forall \dot{T}\ \forall \boldsymbol{D},\quad \Phi_{int} = -\rho\,(\dot{\psi}^m + s^m\,\dot{T}) + \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{D} \geqslant 0$ (2[e] principe, Clausius-Duhem)

$\cdots$ $(\psi^m = \overline{f}_\psi(T, I_1, \cdots, I_m))$, mêmes variables d'état qu'en élasticité)

$$\Phi_{int} = -\rho\,(\partial_T \overline{f}_\psi + \overline{f}_s)\,\dot{T} + \left(-\rho \sum_{j=1}^m \partial_{I_j} \overline{f}_\psi \boldsymbol{S}_j + \boldsymbol{\sigma}\right) : \boldsymbol{D} \geqslant 0$$

$\forall \dot{T}$, $\Phi_{int} \geqslant 0$ et $\partial_T \overline{f}_\psi + \overline{f}_s$ fonction d'état $\quad\Rightarrow$

# Comportement mécanique



## Dissipation intrinsèque :

$\forall \dot{T}\, \forall \boldsymbol{D},\quad \Phi_{int} = -\rho\left(\dot{\psi}^m + s^m\,\dot{T}\right) + \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{D} \geqslant 0$ (2e principe, Clausius-Duhem)

$\ldots$ $(\psi^m = \bar{f}_\psi(T, I_1, \cdots, I_m)$, mêmes variables d'état qu'en élasticité)

$$\Phi_{int} = -\rho\left(\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s\right)\dot{T} + \left(-\rho \sum_{j=1}^{m} \partial_{I_j} \bar{f}_\psi \boldsymbol{S}_j + \boldsymbol{\sigma}\right) : \boldsymbol{D} \geqslant 0$$

$\forall \dot{T}$, $\Phi_{int} \geqslant 0$ et $\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s$ fonction d'état $\quad \Rightarrow \quad \partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s = 0$

# Comportement mécanique

Variables et fonctions d'état

Loi de comportement

Synthèse

## Dissipation intrinsèque :

$\forall \dot{T}\ \forall \boldsymbol{D},\quad \Phi_{int} = -\rho\,(\dot{\psi}^m + s^m\,\dot{T}) + \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{D} \geqslant 0$ (2e principe, Clausius-Duhem)

$\ldots$ $(\psi^m = \bar{f}_\psi(T, I_1, \cdots, I_m))$, mêmes variables d'état qu'en élasticité)

$$\Phi_{int} = -\rho\,(\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s)\,\dot{T} + \Big(-\rho \textstyle\sum_{j=1}^m \partial_{I_j} \bar{f}_\psi \boldsymbol{S}_j + \boldsymbol{\sigma}\Big) : \boldsymbol{D} \geqslant 0$$

$\forall \dot{T}$, $\Phi_{int} \geqslant 0$ et $\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s$ fonction d'état $\quad\Rightarrow\quad \partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s = 0$

(relation de Helmholtz,

# Comportement mécanique

## Dissipation intrinsèque :

$\forall \dot{T}\ \forall \boldsymbol{D}, \quad \Phi_{int} = -\rho\left(\dot{\psi}^m + s^m\,\dot{T}\right) + \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{D} \geqslant 0$ (2[e] principe, Clausius-Duhem)

$\ldots \quad (\psi^m = \bar{f}_\psi(T, I_1, \cdots, I_m)$, mêmes variables d'état qu'en élasticité)

$$\Phi_{int} = -\rho\left(\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s\right)\dot{T} + \Big(-\rho \textstyle\sum_{j=1}^m \partial_{I_j}\bar{f}_\psi \boldsymbol{S}_j + \boldsymbol{\sigma}\Big) : \boldsymbol{D} \geqslant 0$$

$\forall \dot{T}$, $\Phi_{int} \geqslant 0$ et $\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s$ fonction d'état $\quad \Rightarrow \quad \partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s = 0$

(relation de Helmholtz, il suffit donc d'une seule fonction d'état pour définir le modèle)

# Comportement mécanique

Variables et fonctions d'état
Loi de comportement
Synthèse

## Dissipation intrinsèque :

$\forall \dot{T}\ \forall \boldsymbol{D}, \quad \Phi_{int} = -\rho\,(\dot{\psi}^m + s^m\,\dot{T}) + \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{D} \geqslant 0$ (2^e principe, Clausius-Duhem)

$\ldots \quad (\psi^m = \bar{f}_\psi(T, I_1, \cdots, I_m)$, mêmes variables d'état qu'en élasticité)

$$\Phi_{int} = -\rho\,(\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s)\,\dot{T} + \Big(-\rho \textstyle\sum_{j=1}^{m} \partial_{I_j} \bar{f}_\psi \boldsymbol{S}_j + \boldsymbol{\sigma}\Big) : \boldsymbol{D} \geqslant 0$$

$\forall \dot{T}$, $\Phi_{int} \geqslant 0$ et $\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s$ fonction d'état $\quad \Rightarrow \quad \partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s = 0$

(relation de Helmholtz, il suffit donc d'une seule fonction d'état pour définir le modèle)

$\forall \boldsymbol{D}, \quad \Phi_{int} \geqslant 0 \quad \Rightarrow$

# Comportement mécanique



## Dissipation intrinsèque :

$\forall \dot{T}\, \forall \boldsymbol{D}, \quad \Phi_{int} = -\rho\,(\dot{\psi}^m + s^m\,\dot{T}) + \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{D} \geqslant 0$ (2e principe, Clausius-Duhem)

$\ldots \quad (\psi^m = \bar{f}_\psi(T, I_1, \cdots, I_m)$, mêmes variables d'état qu'en élasticité)

$$\Phi_{int} = -\rho\,(\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s)\,\dot{T} + \Big(-\rho \textstyle\sum_{j=1}^{m} \partial_{I_j} \bar{f}_\psi \boldsymbol{S}_j + \boldsymbol{\sigma}\Big) : \boldsymbol{D} \geqslant 0$$

$\forall \dot{T}$, $\Phi_{int} \geqslant 0$ et $\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s$ fonction d'état $\quad \Rightarrow \quad \partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s = 0$

(relation de Helmholtz, il suffit donc d'une seule fonction d'état pour définir le modèle)

$\forall \boldsymbol{D}$, $\Phi_{int} \geqslant 0 \quad \Rightarrow \quad \exists \boldsymbol{f}$ tel que $\boldsymbol{\sigma} - \rho \sum_{j=1}^{m} \partial_{I_j} \bar{f}_\psi \boldsymbol{S}_j = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{D}, \cdots)$

# Comportement mécanique



## Dissipation intrinsèque :

$$\forall \dot{T}\ \forall \boldsymbol{D}, \quad \Phi_{int} = -\rho\,(\dot{\psi}^m + s^m\,\dot{T}) + \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{D} \geqslant 0$$ (2e principe, Clausius-Duhem)

$\ldots$ $(\psi^m = \bar{f}_\psi(T, I_1, \cdots, I_m)$, mêmes variables d'état qu'en élasticité)

$$\Phi_{int} = -\rho\,(\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s)\,\dot{T} + \Big(-\rho \textstyle\sum_{j=1}^m \partial_{I_j} \bar{f}_\psi \boldsymbol{S}_j + \boldsymbol{\sigma}\Big) : \boldsymbol{D} \geqslant 0$$

$\forall \dot{T}$, $\Phi_{int} \geqslant 0$ et $\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s$ fonction d'état $\Rightarrow$ $\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s = 0$

(relation de Helmholtz, il suffit donc d'une seule fonction d'état pour définir le modèle)

$\forall \boldsymbol{D}$, $\Phi_{int} \geqslant 0$ $\Rightarrow$ $\exists \boldsymbol{f}$ tel que $\boldsymbol{\sigma} - \rho \sum_{j=1}^m \partial_{I_j} \bar{f}_\psi \boldsymbol{S}_j = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{D}, \cdots)$

### Contrainte de référence (dite aussi contrainte « élastique »)

# Comportement mécanique



## Dissipation intrinsèque :

$\forall \dot{T}\ \forall \boldsymbol{D}, \quad \Phi_{int} = -\rho\,(\dot{\psi}^m + s^m\,\dot{T}) + \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{D} \geqslant 0$ (2[e] principe, Clausius-Duhem)

$\dots$ $(\psi^m = \bar{f}_\psi(T, I_1, \cdots, I_m))$, mêmes variables d'état qu'en élasticité)

$$\Phi_{int} = -\rho\,(\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s)\,\dot{T} + \Big(-\rho \sum_{j=1}^m \partial_{I_j}\bar{f}_\psi \boldsymbol{S}_j + \boldsymbol{\sigma}\Big) : \boldsymbol{D} \geqslant 0$$

$\forall \dot{T}$, $\Phi_{int} \geqslant 0$ et $\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s$ fonction d'état $\Rightarrow$ $\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s = 0$

(relation de Helmholtz, il suffit donc d'une seule fonction d'état pour définir le modèle)

$\forall \boldsymbol{D}$, $\Phi_{int} \geqslant 0 \quad \Rightarrow \quad \exists \boldsymbol{f}$ tel que $\boldsymbol{\sigma} - \rho \sum_{j=1}^m \partial_{I_j}\bar{f}_\psi \boldsymbol{S}_j = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{D}, \cdots)$

### Contrainte de référence (dite aussi contrainte « élastique »)

On pose : $\boldsymbol{\sigma}_{ref} = \rho \sum_{j=1}^m \partial_{I_j}\bar{f}_\psi \boldsymbol{S}_j$

# Comportement mécanique

Variables et fonctions d'état
Loi de comportement
Synthèse

## Dissipation intrinsèque :

$\forall \dot{T}\ \forall \boldsymbol{D},\quad \Phi_{int} = -\rho\,(\dot{\psi}^m + s^m\,\dot{T}) + \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{D} \geqslant 0$ (2e principe, Clausius-Duhem)

$\ldots$ $(\psi^m = \bar{f}_\psi(T, I_1, \cdots, I_m))$, mêmes variables d'état qu'en élasticité)

$$\Phi_{int} = -\rho\,(\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s)\,\dot{T} + \Big(-\rho\sum_{j=1}^m \partial_{I_j}\bar{f}_\psi\,\boldsymbol{S}_j + \boldsymbol{\sigma}\Big) : \boldsymbol{D} \geqslant 0$$

$\forall \dot{T},\ \Phi_{int} \geqslant 0$ et $\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s$ fonction d'état $\quad\Rightarrow\quad \partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s = 0$

(relation de Helmholtz, il suffit donc d'une seule fonction d'état pour définir le modèle)

$\forall \boldsymbol{D},\ \Phi_{int} \geqslant 0 \quad\Rightarrow\quad \exists \boldsymbol{f}$ tel que $\boldsymbol{\sigma} - \rho\sum_{j=1}^m \partial_{I_j}\bar{f}_\psi\,\boldsymbol{S}_j = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{D}, \cdots)$

## Contrainte de référence (dite aussi contrainte « élastique »)

On pose : $\boldsymbol{\sigma}_{ref} = \rho\sum_{j=1}^m \partial_{I_j}\bar{f}_\psi\,\boldsymbol{S}_j$ ($\boldsymbol{\sigma}_{ref}$ est une fonction d'état)

# Comportement mécanique



## Dissipation intrinsèque :

$$\forall \dot{T}\, \forall \boldsymbol{D}, \quad \Phi_{int} = -\rho\left(\dot{\psi}^m + s^m \dot{T}\right) + \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{D} \geqslant 0$$ (2e principe, Clausius-Duhem)

$\dots$ $(\psi^m = \bar{f}_\psi(T, I_1, \cdots, I_m))$, mêmes variables d'état qu'en élasticité)

$$\Phi_{int} = -\rho\left(\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s\right)\dot{T} + \left(-\rho \sum_{j=1}^m \partial_{I_j}\bar{f}_\psi \boldsymbol{S}_j + \boldsymbol{\sigma}\right) : \boldsymbol{D} \geqslant 0$$

$\forall \dot{T}$, $\Phi_{int} \geqslant 0$ et $\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s$ fonction d'état $\Rightarrow$ $\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s = 0$

(relation de Helmholtz, il suffit donc d'une seule fonction d'état pour définir le modèle)

$\forall \boldsymbol{D}$, $\Phi_{int} \geqslant 0$ $\Rightarrow$ $\exists \boldsymbol{f}$ tel que $\boldsymbol{\sigma} - \rho \sum_{j=1}^m \partial_{I_j}\bar{f}_\psi \boldsymbol{S}_j = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{D}, \cdots)$

### Contrainte de référence (dite aussi contrainte « élastique »)

On pose : $\boldsymbol{\sigma}_{ref} = \rho \sum_{j=1}^m \partial_{I_j}\bar{f}_\psi \boldsymbol{S}_j$ ($\boldsymbol{\sigma}_{ref}$ est une fonction d'état)

### Comportement mécanique

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_{ref} + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{D}, \cdots)$$

# Comportement mécanique

Variables et fonctions d'état

Loi de comportement

Synthèse

## Dissipation intrinsèque :

$\forall \dot{T}\ \forall \boldsymbol{D},\quad \Phi_{int} = -\rho\,(\dot{\psi}^m + s^m\,\dot{T}) + \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{D} \geqslant 0$ (2[e] principe, Clausius-Duhem)

$\dots$ $(\psi^m = \bar{f}_\psi(T, I_1, \cdots, I_m))$, mêmes variables d'état qu'en élasticité)

$$\Phi_{int} = -\rho\,(\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s)\,\dot{T} + \left(-\rho\sum_{j=1}^m \partial_{I_j}\bar{f}_\psi\,\boldsymbol{S}_j + \boldsymbol{\sigma}\right) : \boldsymbol{D} \geqslant 0$$

$\forall \dot{T},\ \Phi_{int} \geqslant 0$ et $\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s$ fonction d'état $\quad\Rightarrow\quad \partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s = 0$

(relation de Helmholtz, il suffit donc d'une seule fonction d'état pour définir le modèle)

$\forall \boldsymbol{D},\ \Phi_{int} \geqslant 0 \quad\Rightarrow\quad \exists \boldsymbol{f}$ tel que $\boldsymbol{\sigma} - \rho\sum_{j=1}^m \partial_{I_j}\bar{f}_\psi\,\boldsymbol{S}_j = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{D}, \cdots)$

### Contrainte de référence (dite aussi contrainte « élastique »)

On pose : $\boldsymbol{\sigma}_{ref} = \rho\sum_{j=1}^m \partial_{I_j}\bar{f}_\psi\,\boldsymbol{S}_j$ ($\boldsymbol{\sigma}_{ref}$ est une fonction d'état)

### Comportement mécanique

$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_{ref} + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{D}, \cdots)$ ($\boldsymbol{\sigma}$ n'est pas une fonction d'état)

# Comportement mécanique



## Dissipation intrinsèque :

$$\forall \dot{T}\ \forall \boldsymbol{D}, \quad \Phi_{int} = -\rho\left(\dot{\psi}^m + s^m\,\dot{T}\right) + \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{D} \geqslant 0$$ (2ᵉ principe, Clausius-Duhem)

$\dots$ ($\psi^m = \bar{f}_\psi(T, I_1, \cdots, I_m)$), mêmes variables d'état qu'en élasticité)

$$\Phi_{int} = -\rho\left(\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s\right)\dot{T} + \left(-\rho \sum_{j=1}^{m} \partial_{I_j} \bar{f}_\psi \boldsymbol{S}_j + \boldsymbol{\sigma}\right) : \boldsymbol{D} \geqslant 0$$

$\forall \dot{T}$, $\Phi_{int} \geqslant 0$ et $\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s$ fonction d'état $\quad\Rightarrow\quad \partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s = 0$

(relation de Helmholtz, il suffit donc d'une seule fonction d'état pour définir le modèle)

$\forall \boldsymbol{D}$, $\Phi_{int} \geqslant 0 \quad\Rightarrow\quad \exists \boldsymbol{f}$ tel que $\boldsymbol{\sigma} - \rho \sum_{j=1}^{m} \partial_{I_j} \bar{f}_\psi \boldsymbol{S}_j = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{D}, \cdots)$

### Contrainte de référence (dite aussi contrainte « élastique »)

On pose : $\boldsymbol{\sigma}_{ref} = \rho \sum_{j=1}^{m} \partial_{I_j} \bar{f}_\psi \boldsymbol{S}_j$ ($\boldsymbol{\sigma}_{ref}$ est une fonction d'état)

### Comportement mécanique

$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_{ref} + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{D}, \cdots)$ ($\boldsymbol{\sigma}$ n'est pas une fonction d'état)

### Contrainte dissipative

$\boldsymbol{\sigma}_d = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{D}, \cdots)$ doit être choisie telle que $\forall \boldsymbol{D}, \quad \boldsymbol{f}(\boldsymbol{D}, \cdots) : \boldsymbol{D} \geqslant 0$

# Synthèse

# Synthèse

## Construction d'un modèle inélastique sans variable mnésique :

# Synthèse



## Construction d'un modèle inélastique sans variable mnésique :

1. Le choix des variables d'état

# Synthèse



## Construction d'un modèle inélastique sans variable mnésique :

1. Le choix des variables d'état cinématiques scalaires $\{I_1, \cdots, I_m\}$ indépendantes

# Synthèse



## Construction d'un modèle inélastique sans variable mnésique :

1. Le choix des variables d'état cinématiques scalaires $\{I_1, \cdots, I_m\}$ indépendantes se fait comme en élasticité (isotrope ou non).

# Synthèse



## Construction d'un modèle inélastique sans variable mnésique :

1. Le choix des variables d'état cinématiques scalaires $\{I_1, \cdots, I_m\}$ indépendantes se fait comme en élasticité (isotrope ou non).
2. La construction de la fonction d'état $\bar{f}_\psi$

# Synthèse



## Construction d'un modèle inélastique **sans variable mnésique :**

1. Le choix des variables d'état cinématiques scalaires $\{I_1, \cdots, I_m\}$ indépendantes se fait comme en élasticité (isotrope ou non).
2. La construction de la fonction d'état $\bar{f}_\psi$ se fait comme en élasticité (isotrope ou non).

# Synthèse



## Construction d'un modèle inélastique sans variable mnésique :

1. Le choix des variables d'état cinématiques scalaires $\{I_1, \cdots, I_m\}$ indépendantes se fait comme en élasticité (isotrope ou non).
2. La construction de la fonction d'état $\bar{f}_\psi$ se fait comme en élasticité (isotrope ou non).
   (chemin dans l'espace des états,

# Synthèse



## Construction d'un modèle inélastique sans variable mnésique :

1. Le choix des variables d'état cinématiques scalaires $\{I_1, \cdots, I_m\}$ indépendantes se fait comme en élasticité (isotrope ou non).
2. La construction de la fonction d'état $\overline{f}_\psi$ se fait comme en élasticité (isotrope ou non).
   (chemin dans l'espace des états, mesures à $\dot{T} = 0$, $\mathbf{grad}\, T = \mathbf{0}$ et $\boldsymbol{D} = \mathbf{0}$,

# Synthèse



## Construction d'un modèle inélastique sans variable mnésique :

1. Le choix des variables d'état cinématiques scalaires $\{I_1, \cdots, I_m\}$ indépendantes se fait comme en élasticité (isotrope ou non).
2. La construction de la fonction d'état $\bar{f}_\psi$ se fait comme en élasticité (isotrope ou non).
(chemin dans l'espace des états, mesures à $\dot{T} = 0$, $\mathbf{grad}\, T = \mathbf{0}$ et $\boldsymbol{D} = \mathbf{0}$, évent. idéalisées)

# Synthèse

## Construction d'un modèle inélastique sans variable mnésique :

1. Le choix des variables d'état cinématiques scalaires $\{I_1, \cdots, I_m\}$ indépendantes se fait comme en élasticité (isotrope ou non).
2. La construction de la fonction d'état $\bar{f}_\psi$ se fait comme en élasticité (isotrope ou non).
(chemin dans l'espace des états, mesures à $\dot{T}=0$, $\mathbf{grad}\,T=\mathbf{0}$ et $\boldsymbol{D}=\mathbf{0}$, évent. idéalisées)

On obtient : $\boldsymbol{\sigma}_{ref} = \rho \sum_{j=1}^{m} \partial_{I_j} \bar{f}_\psi \boldsymbol{S}_j$.

Variables et fonctions d'état
Loi de comportement
Synthèse

# Synthèse



## Construction d'un modèle inélastique sans variable mnésique :

1. Le choix des variables d'état cinématiques scalaires $\{I_1, \cdots, I_m\}$ indépendantes se fait comme en élasticité (isotrope ou non).
2. La construction de la fonction d'état $\bar{f}_\psi$ se fait comme en élasticité (isotrope ou non).
   (chemin dans l'espace des états, mesures à $\dot{T} = 0$, $\mathbf{grad}\, T = \mathbf{0}$ et $\boldsymbol{D} = \mathbf{0}$, évent. idéalisées)

   On obtient : $\boldsymbol{\sigma}_{ref} = \rho \sum_{j=1}^{m} \partial_{I_j} \bar{f}_\psi \boldsymbol{S}_j$. (rappel : $\rho = \frac{\rho_0}{K_v}$)

# Synthèse



## Construction d'un modèle inélastique sans variable mnésique :

1. Le choix des variables d'état cinématiques scalaires $\{I_1, \cdots, I_m\}$ indépendantes se fait comme en élasticité (isotrope ou non).
2. La construction de la fonction d'état $\bar{f}_\psi$ se fait comme en élasticité (isotrope ou non).
   (chemin dans l'espace des états, mesures à $\dot{T} = 0$, $\mathbf{grad}\, T = \mathbf{0}$ et $\boldsymbol{D} = \mathbf{0}$, évent. idéalisées)

   On obtient : $\boldsymbol{\sigma}_{ref} = \rho \sum_{j=1}^{m} \partial_{I_j} \bar{f}_\psi \boldsymbol{S}_j$. (rappel : $\rho = \frac{\rho_0}{K_v}$)
3. L'identification de la contrainte dissipative

# Synthèse

Variables et fonctions d'état
Loi de comportement
Synthèse

## Construction d'un modèle inélastique sans variable mnésique :

1. Le choix des variables d'état cinématiques scalaires $\{I_1, \cdots, I_m\}$ indépendantes se fait comme en élasticité (isotrope ou non).
2. La construction de la fonction d'état $\bar{f}_\psi$ se fait comme en élasticité (isotrope ou non).
   (chemin dans l'espace des états, mesures à $\dot{T}=0$, $\mathbf{grad}\,T=\mathbf{0}$ et $\boldsymbol{D}=\mathbf{0}$, évent. idéalisées)

   On obtient : $\boldsymbol{\sigma}_{ref} = \rho \sum_{j=1}^{m} \partial_{I_j} \bar{f}_\psi \boldsymbol{S}_j$. (rappel : $\rho = \frac{\rho_0}{K_v}$)
3. L'identification de la contrainte dissipative $\boldsymbol{\sigma}_d = \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_{ref}$

# Synthèse



## Construction d'un modèle inélastique sans variable mnésique :

1. Le choix des variables d'état cinématiques scalaires $\{I_1, \cdots, I_m\}$ indépendantes se fait comme en élasticité (isotrope ou non).
2. La construction de la fonction d'état $\bar{f}_\psi$ se fait comme en élasticité (isotrope ou non).
   (chemin dans l'espace des états, mesures à $\dot{T}=0$, $\mathbf{grad}\,T=\mathbf{0}$ et $\boldsymbol{D}=\mathbf{0}$, évent. idéalisées)
   On obtient : $\boldsymbol{\sigma}_{ref} = \rho \sum_{j=1}^{m} \partial_{I_j} \bar{f}_\psi \boldsymbol{S}_j$. (rappel : $\rho = \frac{\rho_0}{K_v}$)
3. L'identification de la contrainte dissipative $\boldsymbol{\sigma}_d = \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_{ref}$ se fait avec des mesures de contraintes à vitesse d'évolution contrôlée.

# Synthèse



## Construction d'un modèle inélastique sans variable mnésique :

1. Le choix des variables d'état cinématiques scalaires $\{I_1, \cdots, I_m\}$ indépendantes se fait comme en élasticité (isotrope ou non).
2. La construction de la fonction d'état $\bar{f}_\psi$ se fait comme en élasticité (isotrope ou non).
   (chemin dans l'espace des états, mesures à $\dot{T}=0$, $\mathbf{grad}\,T=\mathbf{0}$ et $\boldsymbol{D}=\mathbf{0}$, évent. idéalisées)
   On obtient : $\boldsymbol{\sigma}_{ref} = \rho \sum_{j=1}^{m} \partial_{I_j} \bar{f}_\psi \boldsymbol{S}_j$. (rappel : $\rho = \frac{\rho_0}{K_v}$)
3. L'identification de la contrainte dissipative $\boldsymbol{\sigma}_d = \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_{ref}$ se fait avec des mesures de contraintes à vitesse d'évolution contrôlée. (ou bien $\boldsymbol{\sigma}_d = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{D}, \cdots)$ idéalisée)

# Synthèse



## Construction d'un modèle inélastique sans variable mnésique :

1. Le choix des variables d'état cinématiques scalaires $\{I_1, \cdots, I_m\}$ indépendantes se fait comme en élasticité (isotrope ou non).
2. La construction de la fonction d'état $\bar{f}_\psi$ se fait comme en élasticité (isotrope ou non).
   (chemin dans l'espace des états, mesures à $\dot{T}=0$, $\mathbf{grad}\, T=\mathbf{0}$ et $\boldsymbol{D}=\mathbf{0}$, évent. idéalisées)
   On obtient : $\boldsymbol{\sigma}_{ref} = \rho \sum_{j=1}^{m} \partial_{I_j} \bar{f}_\psi \boldsymbol{S}_j$. (rappel : $\rho = \frac{\rho_0}{K_v}$)
3. L'identification de la contrainte dissipative $\boldsymbol{\sigma}_d = \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_{ref}$ se fait avec des mesures de contraintes à vitesse d'évolution contrôlée. (ou bien $\boldsymbol{\sigma}_d = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{D}, \cdots)$ idéalisée)

## Terminologie :

# Synthèse



## Construction d'un modèle inélastique sans variable mnésique :

1. Le choix des variables d'état cinématiques scalaires $\{I_1, \cdots, I_m\}$ indépendantes se fait comme en élasticité (isotrope ou non).
2. La construction de la fonction d'état $\overline{f}_\psi$ se fait comme en élasticité (isotrope ou non).
   (chemin dans l'espace des états, mesures à $\dot{T}=0$, $\mathbf{grad}\,T=\mathbf{0}$ et $\boldsymbol{D}=\mathbf{0}$, évent. idéalisées)

   On obtient : $\boldsymbol{\sigma}_{ref} = \rho \sum_{j=1}^{m} \partial_{I_j} \overline{f}_\psi \boldsymbol{S}_j$. (rappel : $\rho = \frac{\rho_0}{K_v}$)
3. L'identification de la contrainte dissipative $\boldsymbol{\sigma}_d = \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_{ref}$ se fait avec des mesures de contraintes à vitesse d'évolution contrôlée. (ou bien $\boldsymbol{\sigma}_d = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{D}, \cdots)$ idéalisée)

## Terminologie :

Si $\boldsymbol{\sigma}_d = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{D}, T)$ le modèle est dit *viscoélastique*.

# Synthèse

## Construction d'un modèle inélastique sans variable mnésique :

1. Le choix des variables d'état cinématiques scalaires $\{I_1, \cdots, I_m\}$ indépendantes se fait comme en élasticité (isotrope ou non).
2. La construction de la fonction d'état $\bar{f}_\psi$ se fait comme en élasticité (isotrope ou non).
   (chemin dans l'espace des états, mesures à $\dot{T} = 0$, $\mathbf{grad}\,T = \mathbf{0}$ et $\boldsymbol{D} = \mathbf{0}$, évent. idéalisées)
   On obtient : $\boldsymbol{\sigma}_{ref} = \rho \sum_{j=1}^{m} \partial_{I_j} \bar{f}_\psi \boldsymbol{S}_j$. (rappel : $\rho = \frac{\rho_0}{K_v}$)
3. L'identification de la contrainte dissipative $\boldsymbol{\sigma}_d = \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_{ref}$ se fait avec des mesures de contraintes à vitesse d'évolution contrôlée. (ou bien $\boldsymbol{\sigma}_d = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{D}, \cdots)$ idéalisée)

## Terminologie :

Si $\boldsymbol{\sigma}_d = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{D}, T)$ le modèle est dit *viscoélastique*.
Un exemple d'idéalisation possible est :

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{D}, T) = \mu(T)\boldsymbol{D}$$

Variables et fonctions d'état
Loi de comportement
Synthèse

# Synthèse



## Construction d'un modèle inélastique sans variable mnésique :

1. Le choix des variables d'état cinématiques scalaires $\{I_1, \cdots, I_m\}$ indépendantes se fait comme en élasticité (isotrope ou non).
2. La construction de la fonction d'état $\overline{f}_\psi$ se fait comme en élasticité (isotrope ou non).
   (chemin dans l'espace des états, mesures à $\dot{T}=0$, $\mathbf{grad}\, T = \mathbf{0}$ et $\boldsymbol{D} = \mathbf{0}$, évent. idéalisées)
   On obtient : $\boldsymbol{\sigma}_{ref} = \rho \sum_{j=1}^{m} \partial_{I_j} \overline{f}_\psi \boldsymbol{S}_j$. (rappel : $\rho = \frac{\rho_0}{K_v}$)
3. L'identification de la contrainte dissipative $\boldsymbol{\sigma}_d = \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_{ref}$ se fait avec des mesures de contraintes à vitesse d'évolution contrôlée. (ou bien $\boldsymbol{\sigma}_d = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{D}, \cdots)$ idéalisée)

## Terminologie :

Si $\boldsymbol{\sigma}_d = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{D}, T)$ le modèle est dit *viscoélastique*.
Un exemple d'idéalisation possible est :

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{D}, T) = \mu(T)\boldsymbol{D} \quad \text{où } \forall T,\ \mu(T) > 0$$

# Synthèse

Variables et fonctions d'état
Loi de comportement
Synthèse

## Construction d'un modèle inélastique sans variable mnésique :

1. Le choix des variables d'état cinématiques scalaires $\{I_1, \cdots, I_m\}$ indépendantes se fait comme en élasticité (isotrope ou non).
2. La construction de la fonction d'état $\bar{f}_\psi$ se fait comme en élasticité (isotrope ou non).
   (chemin dans l'espace des états, mesures à $\dot{T}=0$, $\mathbf{grad}\,T=\mathbf{0}$ et $\boldsymbol{D}=\mathbf{0}$, évent. idéalisées)
   On obtient : $\boldsymbol{\sigma}_{ref} = \rho \sum_{j=1}^{m} \partial_{I_j} \bar{f}_\psi \boldsymbol{S}_j$. (rappel : $\rho = \frac{\rho_0}{K_v}$)
3. L'identification de la contrainte dissipative $\boldsymbol{\sigma}_d = \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_{ref}$ se fait avec des mesures de contraintes à vitesse d'évolution contrôlée. (ou bien $\boldsymbol{\sigma}_d = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{D}, \cdots)$ idéalisée)

## Terminologie :

Si $\boldsymbol{\sigma}_d = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{D}, T)$ le modèle est dit *viscoélastique*.
Un exemple d'idéalisation possible est :

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{D}, T) = \mu(T)\boldsymbol{D} \quad \text{où } \forall T,\ \mu(T) > 0 \qquad (\Phi_{int} = \mu(T)\boldsymbol{D}:\boldsymbol{D})$$

# Synthèse



## Construction d'un modèle inélastique sans variable mnésique :

1. Le choix des variables d'état cinématiques scalaires $\{I_1, \cdots, I_m\}$ indépendantes se fait comme en élasticité (isotrope ou non).
2. La construction de la fonction d'état $\bar{f}_\psi$ se fait comme en élasticité (isotrope ou non).
   (chemin dans l'espace des états, mesures à $\dot{T}=0$, $\mathbf{grad}\,T=\mathbf{0}$ et $\boldsymbol{D}=\mathbf{0}$, évent. idéalisées)
   On obtient : $\boldsymbol{\sigma}_{ref} = \rho \sum_{j=1}^{m} \partial_{I_j} \bar{f}_\psi \boldsymbol{S}_j$. (rappel : $\rho = \frac{\rho_0}{K_v}$)
3. L'identification de la contrainte dissipative $\boldsymbol{\sigma}_d = \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_{ref}$ se fait avec des mesures de contraintes à vitesse d'évolution contrôlée. (ou bien $\boldsymbol{\sigma}_d = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{D}, \cdots)$ idéalisée)

## Terminologie :

Si $\boldsymbol{\sigma}_d = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{D}, T)$ le modèle est dit *viscoélastique*.
Un exemple d'idéalisation possible est :

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{D}, T) = \mu(T)\boldsymbol{D} \quad \text{où } \forall T,\ \mu(T) > 0 \qquad (\Phi_{int} = \mu(T)\boldsymbol{D}:\boldsymbol{D} = \mu(T)\,\|\boldsymbol{D}\|^2$$

# Synthèse



## Construction d'un modèle inélastique sans variable mnésique :

1. Le choix des variables d'état cinématiques scalaires $\{I_1, \cdots, I_m\}$ indépendantes se fait comme en élasticité (isotrope ou non).
2. La construction de la fonction d'état $\bar{f}_\psi$ se fait comme en élasticité (isotrope ou non).
   (chemin dans l'espace des états, mesures à $\dot{T} = 0$, $\mathbf{grad}\, T = \mathbf{0}$ et $\boldsymbol{D} = \mathbf{0}$, évent. idéalisées)
   On obtient : $\boldsymbol{\sigma}_{ref} = \rho \sum_{j=1}^{m} \partial_{I_j} \bar{f}_\psi \boldsymbol{S}_j$. (rappel : $\rho = \frac{\rho_0}{K_v}$)
3. L'identification de la contrainte dissipative $\boldsymbol{\sigma}_d = \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_{ref}$ se fait avec des mesures de contraintes à vitesse d'évolution contrôlée. (ou bien $\boldsymbol{\sigma}_d = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{D}, \cdots)$ idéalisée)

## Terminologie :

Si $\boldsymbol{\sigma}_d = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{D}, T)$ le modèle est dit *viscoélastique*.
Un exemple d'idéalisation possible est :

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{D}, T) = \mu(T)\,\boldsymbol{D} \quad \text{où } \forall T,\ \mu(T) > 0 \qquad (\Phi_{int} = \mu(T)\,\boldsymbol{D} : \boldsymbol{D} = \mu(T)\,\|\boldsymbol{D}\|^2 \geqslant 0)$$

Troisième partie

# Inélasticité à une variable mnésique

# Variables et fonctions d'état

# Variables et fonctions d'état

## Variables d'état :

# Variables et fonctions d'état

Variables et fonctions d'état

Dissipation intrinsèque

## Variables d'état :

1. La température $T$.

# Variables et fonctions d'état



## Variables d'état :

1. La température $T$. (thermodynamique)

# Variables et fonctions d'état



## Variables d'état :

1. La température $T$. (thermodynamique)
2. Un tenseur de déformation objectif $\boldsymbol{X}$.

# Variables et fonctions d'état



## Variables d'état :

1. La température $T$. (thermodynamique)
2. Un tenseur de déformation objectif $\boldsymbol{X}$. (solide déformable)

# Variables et fonctions d'état

Variables et fonctions d'état
Dissipation intrinsèque

## Variables d'état :

1. La température $T$. (thermodynamique)
2. Un tenseur de déformation objectif $\boldsymbol{X}$. (solide déformable)
3. D'éventuelles directions d'anisotropie $\{\boldsymbol{N}_t^\bullet\}$.

# Variables et fonctions d'état



## Variables d'état :

1. La température $T$. (thermodynamique)
2. Un tenseur de déformation objectif $\boldsymbol{X}$. (solide déformable)
3. D'éventuelles directions d'anisotropie $\{\boldsymbol{N}_t^\bullet\}$.
4. Une variable d'état mnésique scalaire $\alpha$.

# Variables et fonctions d'état



## Variables d'état :

1. La température $T$. (thermodynamique)
2. Un tenseur de déformation objectif $\boldsymbol{X}$. (solide déformable)
3. D'éventuelles directions d'anisotropie $\{\boldsymbol{N}_t^\bullet\}$.
4. Une variable d'état mnésique scalaire $\alpha$.

## Fonctions d'état :

# Variables et fonctions d'état

Variables et fonctions d'état
Dissipation intrinsèque

## Variables d'état :

1. La température $T$. (thermodynamique)
2. Un tenseur de déformation objectif $\boldsymbol{X}$. (solide déformable)
3. D'éventuelles directions d'anisotropie $\{\boldsymbol{N}_t^\bullet\}$.
4. Une variable d'état mnésique scalaire $\alpha$.

## Fonctions d'état :

- Énergie interne massique : (1er principe de la thermodynamique)

# Variables et fonctions d'état



## Variables d'état :

1. La température $T$. (thermodynamique)
2. Un tenseur de déformation objectif $\boldsymbol{X}$. (solide déformable)
3. D'éventuelles directions d'anisotropie $\{\boldsymbol{N}_t^\bullet\}$.
4. Une variable d'état mnésique scalaire $\alpha$.

## Fonctions d'état :

- Énergie interne massique : (1er principe de la thermodynamique)

$$e^m = f_e(T, \boldsymbol{X}, \{\boldsymbol{N}_t^\bullet\}, \alpha)$$

# Variables et fonctions d'état

Variables et fonctions d'état
Dissipation intrinsèque

## Variables d'état :

1. La température $T$. (thermodynamique)
2. Un tenseur de déformation objectif $\boldsymbol{X}$. (solide déformable)
3. D'éventuelles directions d'anisotropie $\{\boldsymbol{N}_t^\bullet\}$.
4. Une variable d'état mnésique scalaire $\alpha$.

## Fonctions d'état :

- Énergie interne massique : (1er principe de la thermodynamique)
  $$e^m = f_e(T, \boldsymbol{X}, \{\boldsymbol{N}_t^\bullet\}, \alpha) = \bar{f}_e(T, I_1, \cdots, I_m, \alpha)$$

# Variables et fonctions d'état

Variables et fonctions d'état
Dissipation intrinsèque

## Variables d'état :

1. La température $T$. (thermodynamique)
2. Un tenseur de déformation objectif $\boldsymbol{X}$. (solide déformable)
3. D'éventuelles directions d'anisotropie $\{\boldsymbol{N}_t^\bullet\}$.
4. Une variable d'état mnésique scalaire $\alpha$.

## Fonctions d'état :

- Énergie interne massique : (1er principe de la thermodynamique)
  $$e^m = f_e(T, \boldsymbol{X}, \{\boldsymbol{N}_t^\bullet\}, \alpha) = \bar{f}_e(T, I_1, \cdots, I_m, \alpha)$$
- Entropie massique :

# Variables et fonctions d'état



## Variables d'état :

1. La température $T$. (thermodynamique)
2. Un tenseur de déformation objectif $\boldsymbol{X}$. (solide déformable)
3. D'éventuelles directions d'anisotropie $\{\boldsymbol{N}_t^\bullet\}$.
4. Une variable d'état mnésique scalaire $\alpha$.

## Fonctions d'état :

- Énergie interne massique : (1er principe de la thermodynamique)

  $$e^m = f_e(T, \boldsymbol{X}, \{\boldsymbol{N}_t^\bullet\}, \alpha) = \bar{f}_e(T, I_1, \cdots, I_m, \alpha)$$

- Entropie massique : (2ème principe de la thermodynamique)

# Variables et fonctions d'état



## Variables d'état :

1. La température $T$. (thermodynamique)
2. Un tenseur de déformation objectif $\boldsymbol{X}$. (solide déformable)
3. D'éventuelles directions d'anisotropie $\{\boldsymbol{N}_t^\bullet\}$.
4. Une variable d'état mnésique scalaire $\alpha$.

## Fonctions d'état :

- Énergie interne massique : (1er principe de la thermodynamique)
  $$e^m = f_e(T, \boldsymbol{X}, \{\boldsymbol{N}_t^\bullet\}, \alpha) = \bar{f}_e(T, I_1, \cdots, I_m, \alpha)$$
- Entropie massique : (2ème principe de la thermodynamique)
  $$s^m = f_s(T, \boldsymbol{X}, \{\boldsymbol{N}_t^\bullet\}, \alpha)$$

# Variables et fonctions d'état



## Variables d'état :

1. La température $T$. (thermodynamique)
2. Un tenseur de déformation objectif $\boldsymbol{X}$. (solide déformable)
3. D'éventuelles directions d'anisotropie $\{\boldsymbol{N}_t^\bullet\}$.
4. Une variable d'état mnésique scalaire $\alpha$.

## Fonctions d'état :

- Énergie interne massique : (1er principe de la thermodynamique)
  $$e^m = f_e(T, \boldsymbol{X}, \{\boldsymbol{N}_t^\bullet\}, \alpha) = \bar{f}_e(T, I_1, \cdots, I_m, \alpha)$$
- Entropie massique : (2ème principe de la thermodynamique)
  $$s^m = f_s(T, \boldsymbol{X}, \{\boldsymbol{N}_t^\bullet\}, \alpha) = \bar{f}_s(T, I_1, \cdots, I_m, \alpha)$$

# Variables et fonctions d'état



## Variables d'état :

1. La température $T$. (thermodynamique)
2. Un tenseur de déformation objectif $\boldsymbol{X}$. (solide déformable)
3. D'éventuelles directions d'anisotropie $\{\boldsymbol{N}_t^\bullet\}$.
4. Une variable d'état mnésique scalaire $\alpha$.

## Fonctions d'état :

- Énergie interne massique : (1er principe de la thermodynamique)
  $$e^m = f_e(T, \boldsymbol{X}, \{\boldsymbol{N}_t^\bullet\}, \alpha) = \bar{f}_e(T, I_1, \cdots, I_m, \alpha)$$
- Entropie massique : (2ème principe de la thermodynamique)
  $$s^m = f_s(T, \boldsymbol{X}, \{\boldsymbol{N}_t^\bullet\}, \alpha) = \bar{f}_s(T, I_1, \cdots, I_m, \alpha)$$
- Énergie libre massique de Helmholtz :

# Variables et fonctions d'état



## Variables d'état :

1. La température $T$. (thermodynamique)
2. Un tenseur de déformation objectif $\boldsymbol{X}$. (solide déformable)
3. D'éventuelles directions d'anisotropie $\{\boldsymbol{N}_t^\bullet\}$.
4. Une variable d'état mnésique scalaire $\alpha$.

## Fonctions d'état :

- Énergie interne massique : (1er principe de la thermodynamique)
  $$e^m = f_e(T, \boldsymbol{X}, \{\boldsymbol{N}_t^\bullet\}, \alpha) = \bar{f}_e(T, I_1, \cdots, I_m, \alpha)$$
- Entropie massique : (2ème principe de la thermodynamique)
  $$s^m = f_s(T, \boldsymbol{X}, \{\boldsymbol{N}_t^\bullet\}, \alpha) = \bar{f}_s(T, I_1, \cdots, I_m, \alpha)$$
- Énergie libre massique de Helmholtz : (fonction d'état auxilliaire)

# Variables et fonctions d'état



## Variables d'état :

1. La température $T$. (thermodynamique)
2. Un tenseur de déformation objectif $\boldsymbol{X}$. (solide déformable)
3. D'éventuelles directions d'anisotropie $\{\boldsymbol{N}_t^\bullet\}$.
4. Une variable d'état mnésique scalaire $\alpha$.

## Fonctions d'état :

- Énergie interne massique : (1er principe de la thermodynamique)
  $$e^m = f_e(T, \boldsymbol{X}, \{\boldsymbol{N}_t^\bullet\}, \alpha) = \bar{f}_e(T, I_1, \cdots, I_m, \alpha)$$
- Entropie massique : (2ème principe de la thermodynamique)
  $$s^m = f_s(T, \boldsymbol{X}, \{\boldsymbol{N}_t^\bullet\}, \alpha) = \bar{f}_s(T, I_1, \cdots, I_m, \alpha)$$
- Énergie libre massique de Helmholtz : (fonction d'état auxilliaire)
  $$\psi^m = e^m - T\, s^m$$

# Variables et fonctions d'état



## Variables d'état :

1. La température $T$. (thermodynamique)
2. Un tenseur de déformation objectif $\boldsymbol{X}$. (solide déformable)
3. D'éventuelles directions d'anisotropie $\{\boldsymbol{N}_t^\bullet\}$.
4. Une variable d'état mnésique scalaire $\alpha$.

## Fonctions d'état :

- Énergie interne massique : (1er principe de la thermodynamique)
  $$e^m = f_e(T, \boldsymbol{X}, \{\boldsymbol{N}_t^\bullet\}, \alpha) = \bar{f}_e(T, I_1, \cdots, I_m, \alpha)$$
- Entropie massique : (2ème principe de la thermodynamique)
  $$s^m = f_s(T, \boldsymbol{X}, \{\boldsymbol{N}_t^\bullet\}, \alpha) = \bar{f}_s(T, I_1, \cdots, I_m, \alpha)$$
- Énergie libre massique de Helmholtz : (fonction d'état auxilliaire)
  $$\psi^m = e^m - T\, s^m = f_\psi(T, \boldsymbol{X}, \{\boldsymbol{N}_t^\bullet\}, \alpha)$$

# Variables et fonctions d'état

Variables et fonctions d'état
Dissipation intrinsèque

## Variables d'état :

1. La température $T$. (thermodynamique)
2. Un tenseur de déformation objectif $\boldsymbol{X}$. (solide déformable)
3. D'éventuelles directions d'anisotropie $\{\boldsymbol{N}_t^\bullet\}$.
4. Une variable d'état mnésique scalaire $\alpha$.

## Fonctions d'état :

- Énergie interne massique : (1er principe de la thermodynamique)
  $$e^m = f_e(T, \boldsymbol{X}, \{\boldsymbol{N}_t^\bullet\}, \alpha) = \bar{f}_e(T, I_1, \cdots, I_m, \alpha)$$
- Entropie massique : (2ème principe de la thermodynamique)
  $$s^m = f_s(T, \boldsymbol{X}, \{\boldsymbol{N}_t^\bullet\}, \alpha) = \bar{f}_s(T, I_1, \cdots, I_m, \alpha)$$
- Énergie libre massique de Helmholtz : (fonction d'état auxilliaire)
  $$\psi^m = e^m - T\, s^m = f_\psi(T, \boldsymbol{X}, \{\boldsymbol{N}_t^\bullet\}, \alpha) = \bar{f}_\psi(T, I_1, \cdots, I_m, \alpha)$$

# Variables et fonctions d'état



## Variables d'état :

1. La température $T$. (thermodynamique)
2. Un tenseur de déformation objectif $\boldsymbol{X}$. (solide déformable)
3. D'éventuelles directions d'anisotropie $\{\boldsymbol{N}_t^\bullet\}$.
4. Une variable d'état mnésique scalaire $\alpha$.

## Fonctions d'état :

- Énergie interne massique : (1er principe de la thermodynamique)
  $$e^m = f_e(T, \boldsymbol{X}, \{\boldsymbol{N}_t^\bullet\}, \alpha) = \bar{f}_e(T, I_1, \cdots, I_m, \alpha)$$
- Entropie massique : (2ème principe de la thermodynamique)
  $$s^m = f_s(T, \boldsymbol{X}, \{\boldsymbol{N}_t^\bullet\}, \alpha) = \bar{f}_s(T, I_1, \cdots, I_m, \alpha)$$
- Énergie libre massique de Helmholtz : (fonction d'état auxilliaire)
  $$\psi^m = e^m - T\, s^m = f_\psi(T, \boldsymbol{X}, \{\boldsymbol{N}_t^\bullet\}, \alpha) = \bar{f}_\psi(T, I_1, \cdots, I_m, \alpha)$$

# Dissipation intrinsèque

# Dissipation intrinsèque



## Dissipation intrinsèque :

# Dissipation intrinsèque



## Dissipation intrinsèque :

$\forall \dot{T} \, \forall \boldsymbol{D},$

# Dissipation intrinsèque



## Dissipation intrinsèque :

$$\forall \dot{T}\, \forall \boldsymbol{D}, \quad -\rho\left(\dot{\psi}^m + s^m\,\dot{T}\right) + \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{D} \geqslant 0$$

# Dissipation intrinsèque



## Dissipation intrinsèque :

$$\forall \dot{T}\, \forall \boldsymbol{D}, \quad -\rho\left(\dot{\psi}^m + s^m\,\dot{T}\right) + \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{D} \geqslant 0$$

($\Phi_{int} \geqslant 0$, Clausius-Duhem)

# Dissipation intrinsèque



## Dissipation intrinsèque :

$$\forall \dot{T}\, \forall \boldsymbol{D}, \quad -\rho\,(\dot{\psi}^m + s^m\,\dot{T}) + \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{D} \geqslant 0 \qquad (\Phi_{int} \geqslant 0, \text{ Clausius-Duhem})$$

$$\dots$$

# Dissipation intrinsèque



## Dissipation intrinsèque :

$$\forall \dot{T}\, \forall \boldsymbol{D}, \quad -\rho\,(\dot{\psi}^m + s^m\,\dot{T}) + \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{D} \geqslant 0 \qquad (\Phi_{int} \geqslant 0, \text{ Clausius-Duhem})$$

$$\ldots \qquad (\text{on utilise } \psi^m = \bar{f}_\psi(T, I_1, \cdots, I_m, \alpha) \text{ et } \dot{I}_j = \boldsymbol{S}_j : \boldsymbol{D})$$

# Dissipation intrinsèque



## Dissipation intrinsèque :

$$\forall \dot{T}\,\forall \boldsymbol{D},\quad -\rho\left(\dot{\psi}^m + s^m\,\dot{T}\right) + \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{D} \geqslant 0$$ ($\Phi_{int} \geqslant 0$, Clausius-Duhem)

$\ldots$ (on utilise $\psi^m = \overline{f}_\psi(T, I_1, \cdots, I_m, \alpha)$ et $\dot{I}_j = \boldsymbol{S}_j : \boldsymbol{D}$)

$$\forall \dot{T}\,\forall \boldsymbol{D},\quad -\rho\left(\partial_T \overline{f}_\psi + \overline{f}_s\right)\dot{T} + \left(-\rho \sum_{j=1}^m \partial_{I_j} \overline{f}_\psi \boldsymbol{S}_j + \boldsymbol{\sigma}\right) : \boldsymbol{D} - \rho\,\partial_\alpha \overline{f}_\psi\,\dot{\alpha} \geqslant 0$$

# Dissipation intrinsèque



## Dissipation intrinsèque :

$$\forall \dot{T}\, \forall \boldsymbol{D}, \quad -\rho\,(\dot{\psi}^m + s^m\,\dot{T}) + \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{D} \geqslant 0$$ ($\Phi_{int} \geqslant 0$, Clausius-Duhem)

$\ldots$ (on utilise $\psi^m = \bar{f}_\psi(T, I_1, \cdots, I_m, \alpha)$ et $\dot{I}_j = \boldsymbol{S}_j : \boldsymbol{D}$)

$$\forall \dot{T}\, \forall \boldsymbol{D}, \quad -\rho\,(\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s)\,\dot{T} + \Big(-\rho \sum_{j=1}^m \partial_{I_j} \bar{f}_\psi \boldsymbol{S}_j + \boldsymbol{\sigma}\Big) : \boldsymbol{D} - \rho\,\partial_\alpha \bar{f}_\psi\,\dot{\alpha} \geqslant 0$$

# Dissipation intrinsèque



## Dissipation intrinsèque :

$$\forall \dot{T}\, \forall \boldsymbol{D}, \quad -\rho\,(\dot{\psi}^m + s^m\,\dot{T}) + \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{D} \geqslant 0 \qquad (\Phi_{int} \geqslant 0,\ \text{Clausius-Duhem})$$

$\dots$ (on utilise $\psi^m = \overline{f}_\psi(T, I_1, \cdots, I_m, \alpha)$ et $\dot{I}_j = \boldsymbol{S}_j : \boldsymbol{D}$)

$$\forall \dot{T}\, \forall \boldsymbol{D}, \quad -\rho\,(\partial_T \overline{f}_\psi + \overline{f}_s)\,\dot{T} + \left(-\rho \sum_{j=1}^m \partial_{I_j} \overline{f}_\psi \boldsymbol{S}_j + \boldsymbol{\sigma}\right) : \boldsymbol{D} - \rho\,\partial_\alpha \overline{f}_\psi\,\dot{\alpha} \geqslant 0$$

# Dissipation intrinsèque



## Dissipation intrinsèque :

$\forall \dot{T}\, \forall \boldsymbol{D}, \quad -\rho\,(\dot{\psi}^m + s^m\,\dot{T}) + \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{D} \geqslant 0$ ($\Phi_{int} \geqslant 0$, Clausius-Duhem)

$\ldots$ (on utilise $\psi^m = \bar{f}_\psi(T, I_1, \cdots, I_m, \alpha)$ et $\dot{I}_j = \boldsymbol{S}_j : \boldsymbol{D}$)

$\forall \dot{T}\, \forall \boldsymbol{D}, \quad -\rho\,(\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s)\,\dot{T} + \left(-\rho \sum_{j=1}^{m} \partial_{I_j} \bar{f}_\psi \boldsymbol{S}_j + \boldsymbol{\sigma}\right) : \boldsymbol{D} - \rho\,\partial_\alpha \bar{f}_\psi\,\dot{\alpha} \geqslant 0$

## Remarque importante :

# Dissipation intrinsèque



## Dissipation intrinsèque :

$\forall \dot{T}\, \forall \boldsymbol{D},\quad -\rho\,(\dot{\psi}^m + s^m\,\dot{T}) + \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{D} \geqslant 0$ ($\Phi_{int} \geqslant 0,$ Clausius-Duhem)

$\ldots$ (on utilise $\psi^m = \bar{f}_\psi(T, I_1, \cdots, I_m, \alpha)$ et $\dot{I}_j = \boldsymbol{S}_j : \boldsymbol{D}$)

$$\forall \dot{T}\, \forall \boldsymbol{D},\quad -\rho\,(\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s)\,\dot{T} + \Big(-\rho\,\textstyle\sum_{j=1}^{m} \partial_{I_j} \bar{f}_\psi\, \boldsymbol{S}_j + \boldsymbol{\sigma}\Big) : \boldsymbol{D} - \rho\,\partial_\alpha \bar{f}_\psi\, \dot{\alpha} \geqslant 0$$

## Remarque importante :

La variable mnésique $\alpha$ n'ayant pas encore de signification physique,

# Dissipation intrinsèque



## Dissipation intrinsèque :

$$\forall \dot{T}\,\forall \boldsymbol{D},\quad -\rho\,(\dot{\psi}^m + s^m\,\dot{T}) + \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{D} \geqslant 0$$ ($\Phi_{int} \geqslant 0$, Clausius-Duhem)

$\dots$ (on utilise $\psi^m = \bar{f}_\psi(T, I_1, \cdots, I_m, \alpha)$ et $\dot{I}_j = \boldsymbol{S}_j : \boldsymbol{D}$)

$$\forall \dot{T}\,\forall \boldsymbol{D},\quad -\rho\,(\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s)\,\dot{T} + \left(-\rho\,\sum_{j=1}^m \partial_{I_j}\bar{f}_\psi\,\boldsymbol{S}_j + \boldsymbol{\sigma}\right) : \boldsymbol{D} - \rho\,\partial_\alpha \bar{f}_\psi\,\dot{\alpha} \geqslant 0$$

## Remarque importante :

La variable mnésique $\alpha$ n'ayant pas encore de signification physique, sa dérivée particulaire $\dot{\alpha}$ lors d'une évolution n'est pas définie.

# Dissipation intrinsèque



## Dissipation intrinsèque :

$\forall \dot{T}\,\forall \boldsymbol{D},\quad -\rho\,(\dot{\psi}^m + s^m\,\dot{T}) + \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{D} \geqslant 0$ ($\Phi_{int} \geqslant 0$, Clausius-Duhem)

$\dots$ (on utilise $\psi^m = \bar{f}_\psi(T, I_1, \cdots, I_m, \alpha)$ et $\dot{I}_j = \boldsymbol{S}_j : \boldsymbol{D}$)

$\forall \dot{T}\,\forall \boldsymbol{D},\quad -\rho\,(\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s)\,\dot{T} + \left(-\rho\,\sum_{j=1}^{m} \partial_{I_j} \bar{f}_\psi\,\boldsymbol{S}_j + \boldsymbol{\sigma}\right) : \boldsymbol{D} - \rho\,\partial_\alpha \bar{f}_\psi\,\dot{\alpha} \geqslant 0$

## Remarque importante :

La variable mnésique $\alpha$ n'ayant pas encore de signification physique, sa dérivée particulaire $\dot{\alpha}$ lors d'une évolution n'est pas définie.

On ne pourra exploiter la non négativité de la dissipation intrinsèque dans toute évolution que lorsque l'on aura attribué un sens physique à la variable d'état mnésique $\alpha$ !

# Dissipation intrinsèque



## Dissipation intrinsèque :

$\forall \dot{T}\, \forall \boldsymbol{D}, \quad -\rho\,(\dot{\psi}^m + s^m\,\dot{T}) + \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{D} \geqslant 0$ $\quad$ ($\Phi_{int} \geqslant 0$, Clausius-Duhem)

$\dots$ $\quad$ (on utilise $\psi^m = \bar{f}_\psi(T, I_1, \cdots, I_m, \alpha)$ et $\dot{I}_j = \boldsymbol{S}_j : \boldsymbol{D}$)

$$\forall \dot{T}\, \forall \boldsymbol{D}, \quad -\rho\,(\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s)\,\dot{T} + \Big(-\rho \sum_{j=1}^m \partial_{I_j} \bar{f}_\psi\, \boldsymbol{S}_j + \boldsymbol{\sigma}\Big) : \boldsymbol{D} - \rho\, \partial_\alpha \bar{f}_\psi\, \dot{\alpha} \geqslant 0$$

## Remarque importante :

La variable mnésique $\alpha$ n'ayant pas encore de signification physique, sa dérivée particulaire $\dot{\alpha}$ lors d'une évolution n'est pas définie.

> On ne pourra exploiter la non négativité de la dissipation intrinsèque dans toute évolution que lorsque l'on aura attribué un sens physique à la variable d'état mnésique $\alpha$ !

C'est ce qui sera fait dans les modèles de comportement qui suivent.

Quatrième partie

# Un modèle de plasticité

# Motivations

# Motivations

Les solides élastiques ont une limite élastique pour se protéger :

# Motivations

Les solides élastiques ont une limite élastique pour se protéger :

- des réarrangements de liaisons interatomiques

# Motivations

Les solides élastiques ont une limite élastique pour se protéger :

- des réarrangements de liaisons interatomiques (plastification)

# Motivations

Les solides élastiques ont une limite élastique pour se protéger :

- des réarrangements de liaisons interatomiques (plastification)
- ou des ruptures de liaisons interatomiques

# Motivations

Les solides élastiques ont une limite élastique pour se protéger :

- des réarrangements de liaisons interatomiques (plastification)
- ou des ruptures de liaisons interatomiques (endommagement)

# Motivations



Les solides élastiques ont une limite élastique pour se protéger :

- des réarrangements de liaisons interatomiques (plastification)
- ou des ruptures de liaisons interatomiques (endommagement)

On souhaite construire un modèle du comportement au delà d'une limite élastique par plastification.

# Motivations



Les solides élastiques ont une limite élastique pour se protéger :

- des réarrangements de liaisons interatomiques (plastification)
- ou des ruptures de liaisons interatomiques (endommagement)

On souhaite construire un modèle du comportement au delà d'une limite élastique par plastification. (on suppose qu'il n'y a pas d'endommagement)

# Motivations



Les solides élastiques ont une limite élastique pour se protéger :

- des réarrangements de liaisons interatomiques (plastification)
- ou des ruptures de liaisons interatomiques (endommagement)

On souhaite construire un modèle du comportement au delà d'une limite élastique par plastification. (on suppose qu'il n'y a pas d'endommagement)

## Choix d'un critère (macroscopique) de limite élastique

# Motivations



Les solides élastiques ont une limite élastique pour se protéger :

- des réarrangements de liaisons interatomiques (plastification)
- ou des ruptures de liaisons interatomiques (endommagement)

On souhaite construire un modèle du comportement au delà d'une limite élastique par plastification. (on suppose qu'il n'y a pas d'endommagement)

**Choix d'un critère (macroscopique) de limite élastique**

La distorsion stérique maximale en une particule $P$ est soumise à une limite :

# Motivations



Les solides élastiques ont une limite élastique pour se protéger :

- des réarrangements de liaisons interatomiques (plastification)
- ou des ruptures de liaisons interatomiques (endommagement)

On souhaite construire un modèle du comportement au delà d'une limite élastique par plastification. (on suppose qu'il n'y a pas d'endommagement)

**Choix d'un critère (macroscopique) de limite élastique**

La distorsion stérique maximale en une particule $P$ est soumise à une limite : $\forall P \, \forall t, \quad \delta^s_{max}(P,t) \leq \delta_{lim}$

# Motivations



Les solides élastiques ont une limite élastique pour se protéger :

- des réarrangements de liaisons interatomiques (plastification)
- ou des ruptures de liaisons interatomiques (endommagement)

On souhaite construire un modèle du comportement au delà d'une limite élastique par plastification. (on suppose qu'il n'y a pas d'endommagement)

## Choix d'un critère (macroscopique) de limite élastique

La distorsion stérique maximale en une particule $P$ est soumise à une limite : $\forall P\, \forall t, \quad \delta^s_{max}(P,t) \leq \delta_{lim}$

(si $\delta^s_{max}(P,t) > \delta_{lim}$, des réarrangements de liaisons se produisent en la particule $P$)

# Motivations



Les solides élastiques ont une limite élastique pour se protéger :

- des réarrangements de liaisons interatomiques (plastification)
- ou des ruptures de liaisons interatomiques (endommagement)

On souhaite construire un modèle du comportement au delà d'une limite élastique par plastification. (on suppose qu'il n'y a pas d'endommagement)

## Choix d'un critère (macroscopique) de limite élastique

La distorsion stérique maximale en une particule $P$ est soumise à une limite : $\forall P\, \forall t, \quad \delta^s_{max}(P,t) \leq \delta_{lim}$

(si $\delta^s_{max}(P,t) > \delta_{lim}$, des réarrangements de liaisons se produisent en la particule $P$)

**Remarques :**

# Motivations



Les solides élastiques ont une limite élastique pour se protéger :

- des réarrangements de liaisons interatomiques (plastification)
- ou des ruptures de liaisons interatomiques (endommagement)

On souhaite construire un modèle du comportement au delà d'une limite élastique par plastification. (on suppose qu'il n'y a pas d'endommagement)

## Choix d'un critère (macroscopique) de limite élastique

La distorsion stérique maximale en une particule $P$ est soumise à une limite : $\forall P \, \forall t, \quad \delta^s_{max}(P,t) \leq \delta_{lim}$

(si $\delta^s_{max}(P,t) > \delta_{lim}$, des réarrangements de liaisons se produisent en la particule $P$)

**Remarques :**

- Contrairement à des habitudes courantes, le seuil de délenchement de la plastification porte ici sur la déformation et non sur les contraintes.

# Motivations



Les solides élastiques ont une limite élastique pour se protéger :

- des réarrangements de liaisons interatomiques (plastification)
- ou des ruptures de liaisons interatomiques (endommagement)

On souhaite construire un modèle du comportement au delà d'une limite élastique par plastification. (on suppose qu'il n'y a pas d'endommagement)

## Choix d'un critère (macroscopique) de limite élastique

La distorsion stérique maximale en une particule $P$ est soumise à une limite : $\forall P \, \forall t, \quad \delta^s_{max}(P,t) \leq \delta_{lim}$

(si $\delta^s_{max}(P,t) > \delta_{lim}$, des réarrangements de liaisons se produisent en la particule $P$)

### Remarques :

- Contrairement à des habitudes courantes, le seuil de délenchement de la plastification porte ici sur la déformation et non sur les contraintes.
- Pour les adeptes de la « loi » de Hooke, un critère traditionnel est :
  $\sigma_{VM} = \sqrt{3/2}\,\|\mathbf{dev}\,\boldsymbol{\sigma}\| \leq \sigma_{lim}$

# Motivations



Les solides élastiques ont une limite élastique pour se protéger :

- des réarrangements de liaisons interatomiques (plastification)
- ou des ruptures de liaisons interatomiques (endommagement)

On souhaite construire un modèle du comportement au delà d'une limite élastique par plastification. (on suppose qu'il n'y a pas d'endommagement)

## Choix d'un critère (macroscopique) de limite élastique

La distorsion stérique maximale en une particule $P$ est soumise à une limite : $\forall P\, \forall t, \quad \delta^s_{max}(P,t) \leq \delta_{lim}$

(si $\delta^s_{max}(P,t) > \delta_{lim}$, des réarrangements de liaisons se produisent en la particule $P$)

**Remarques :**

- Contrairement à des habitudes courantes, le seuil de délenchement de la plastification porte ici sur la déformation et non sur les contraintes.
- Pour les adeptes de la « loi » de Hooke, un critère traditionnel est :

$$\sigma_{VM} = \sqrt{3/2}\,\|\mathbf{dev}\,\boldsymbol{\sigma}\| \leq \sigma_{lim} \quad \Leftrightarrow \quad \|\mathbf{dev}\,\boldsymbol{\varepsilon}\| \leq \frac{\sigma_{lim}}{2\mu\sqrt{3/2}}.$$

# Motivations



Les solides élastiques ont une limite élastique pour se protéger :

- des réarrangements de liaisons interatomiques (plastification)
- ou des ruptures de liaisons interatomiques (endommagement)

On souhaite construire un modèle du comportement au delà d'une limite élastique par plastification. (on suppose qu'il n'y a pas d'endommagement)

## Choix d'un critère (macroscopique) de limite élastique

La distorsion stérique maximale en une particule $P$ est soumise à une limite : $\forall P \, \forall t, \quad \delta^s_{max}(P,t) \leq \delta_{lim}$

(si $\delta^s_{max}(P,t) > \delta_{lim}$, des réarrangements de liaisons se produisent en la particule $P$)

**Remarques :**

- Contrairement à des habitudes courantes, le seuil de délenchement de la plastification porte ici sur la déformation et non sur les contraintes.
- Pour les adeptes de la « loi » de Hooke, un critère traditionnel est :
$$\sigma_{VM} = \sqrt{3/2}\,\|\mathbf{dev}\,\boldsymbol{\sigma}\| \leq \sigma_{lim} \quad \Leftrightarrow \quad \|\mathbf{dev}\,\boldsymbol{\varepsilon}\| \leq \frac{\sigma_{lim}}{2\mu\,\sqrt{3/2}}.$$
(mais l'interprétation cinématique de $\|\mathbf{dev}\,\boldsymbol{\varepsilon}\|$ est obscure !)

# Motivations



Les solides élastiques ont une limite élastique pour se protéger :

- des réarrangements de liaisons interatomiques (plastification)
- ou des ruptures de liaisons interatomiques (endommagement)

On souhaite construire un modèle du comportement au delà d'une limite élastique par plastification. (on suppose qu'il n'y a pas d'endommagement)

## Choix d'un critère (macroscopique) de limite élastique

La distorsion stérique maximale en une particule $P$ est soumise à une limite : $\forall P \, \forall t, \quad \delta^s_{max}(P,t) \leq \delta_{lim}$

(si $\delta^s_{max}(P,t) > \delta_{lim}$, des réarrangements de liaisons se produisent en la particule $P$)

**Remarques :**

- Contrairement à des habitudes courantes, le seuil de délenchement de la plastification porte ici sur la déformation et non sur les contraintes.
- Pour les adeptes de la « loi » de Hooke, un critère traditionnel est :

$$\sigma_{VM} = \sqrt{3/2}\,\|\mathbf{dev}\,\boldsymbol{\sigma}\| \leq \sigma_{lim} \quad \Leftrightarrow \quad \|\mathbf{dev}\,\boldsymbol{\varepsilon}\| \leq \frac{\sigma_{lim}}{2\,\mu\,\sqrt{3/2}}.$$

(mais l'interprétation cinématique de $\|\mathbf{dev}\,\boldsymbol{\varepsilon}\|$ est obscure !)

# Hypothèse simplificatrice

# Hypothèse simplificatrice



## Hypothèse simplificatrice

La limite élastique $\delta_{lim}$ ne dépend pas de la température.

# Hypothèse simplificatrice



## Hypothèse simplificatrice

La limite élastique $\delta_{lim}$ ne dépend pas de la température.

## Discussion :

# Hypothèse simplificatrice

## Hypothèse simplificatrice

La limite élastique $\delta_{lim}$ ne dépend pas de la température.

## Discussion :

- Le déclenchement des réarrangements de liaisons ne dépend *a priori* que de la structure microscopique, et donc peu de la température.

# Hypothèse simplificatrice

## Hypothèse simplificatrice

La limite élastique $\delta_{lim}$ ne dépend pas de la température.

## Discussion :

- Le déclenchement des réarrangements de liaisons ne dépend *a priori* que de la structure microscopique, et donc peu de la température.
  (sauf changement de phase dû à $T$, milieu multiconstituants)

# Hypothèse simplificatrice



## Hypothèse simplificatrice

La limite élastique $\delta_{lim}$ ne dépend pas de la température.

## Discussion :

- Le déclenchement des réarrangements de liaisons ne dépend *a priori* que de la structure microscopique, et donc peu de la température.
  (sauf changement de phase dû à $T$, milieu multiconstituants)
- Contrairement aux critères portant sur la déformation, les critères en contraintes dépendent naturellement de la température,

# Hypothèse simplificatrice



## Hypothèse simplificatrice

La limite élastique $\delta_{lim}$ ne dépend pas de la température.

## Discussion :

- Le déclenchement des réarrangements de liaisons ne dépend *a priori* que de la structure microscopique, et donc peu de la température.
(sauf changement de phase dû à $T$, milieu multiconstituants)
- Contrairement aux critères portant sur la déformation, les critères en contraintes dépendent naturellement de la température, car l'énergie libre massique de Helmholtz $\psi^m$ (qui détermine $\boldsymbol{\sigma}$) est, entre autres, fonction de la température.

# Hypothèse simplificatrice



## Hypothèse simplificatrice

La limite élastique $\delta_{lim}$ ne dépend pas de la température.

## Discussion :

- Le déclenchement des réarrangements de liaisons ne dépend *a priori* que de la structure microscopique, et donc peu de la température.
  (sauf changement de phase dû à $T$, milieu multiconstituants)
- Contrairement aux critères portant sur la déformation, les critères en contraintes dépendent naturellement de la température, car l'énergie libre massique de Helmholtz $\psi^m$ (qui détermine $\boldsymbol{\sigma}$) est, entre autres, fonction de la température.
- Il est possible de construire un modèle de comportement avec une limite élastique $\delta_{lim}(T)$,

# Hypothèse simplificatrice



## Hypothèse simplificatrice

La limite élastique $\delta_{lim}$ ne dépend pas de la température.

## Discussion :

- Le déclenchement des réarrangements de liaisons ne dépend *a priori* que de la structure microscopique, et donc peu de la température. (sauf changement de phase dû à $T$, milieu multiconstituants)
- Contrairement aux critères portant sur la déformation, les critères en contraintes dépendent naturellement de la température, car l'énergie libre massique de Helmholtz $\psi^m$ (qui détermine $\boldsymbol{\sigma}$) est, entre autres, fonction de la température.
- Il est possible de construire un modèle de comportement avec une limite élastique $\delta_{lim}(T)$, mais le modèle est un peu plus complexe.

# Hypothèse simplificatrice



## Hypothèse simplificatrice

La limite élastique $\delta_{lim}$ ne dépend pas de la température.

## Discussion :

- Le déclenchement des réarrangements de liaisons ne dépend *a priori* que de la structure microscopique, et donc peu de la température.
  (sauf changement de phase dû à $T$, milieu multiconstituants)
- Contrairement aux critères portant sur la déformation, les critères en contraintes dépendent naturellement de la température, car l'énergie libre massique de Helmholtz $\psi^m$ (qui détermine $\boldsymbol{\sigma}$) est, entre autres, fonction de la température.
- Il est possible de construire un modèle de comportement avec une limite élastique $\delta_{lim}(T)$, mais le modèle est un peu plus complexe.
  (l'agitation thermique peut favoriser les réarrangements,

# Hypothèse simplificatrice

## Hypothèse simplificatrice

La limite élastique $\delta_{lim}$ ne dépend pas de la température.

## Discussion :

- Le déclenchement des réarrangements de liaisons ne dépend *a priori* que de la structure microscopique, et donc peu de la température.
  (sauf changement de phase dû à $T$, milieu multiconstituants)
- Contrairement aux critères portant sur la déformation, les critères en contraintes dépendent naturellement de la température, car l'énergie libre massique de Helmholtz $\psi^m$ (qui détermine $\boldsymbol{\sigma}$) est, entre autres, fonction de la température.
- Il est possible de construire un modèle de comportement avec une limite élastique $\delta_{lim}(T)$, mais le modèle est un peu plus complexe.
  (l'agitation thermique peut favoriser les réarrangements, il faut connaître la fonction $\delta_{lim}(T)$)

# Hypothèse simplificatrice



## Hypothèse simplificatrice

La limite élastique $\delta_{lim}$ ne dépend pas de la température.

## Discussion :

- Le déclenchement des réarrangements de liaisons ne dépend *a priori* que de la structure microscopique, et donc peu de la température.
  (sauf changement de phase dû à $T$, milieu multiconstituants)
- Contrairement aux critères portant sur la déformation, les critères en contraintes dépendent naturellement de la température, car l'énergie libre massique de Helmholtz $\psi^m$ (qui détermine $\boldsymbol{\sigma}$) est, entre autres, fonction de la température.
- Il est possible de construire un modèle de comportement avec une limite élastique $\delta_{lim}(T)$, mais le modèle est un peu plus complexe.
  (l'agitation thermique peut favoriser les réarrangements, il faut connaître la fonction $\delta_{lim}(T)$)

## Notation

Dans la suite, la distorsion stérique maximale $\delta^s_{max}$ sera notée $\delta$.

# Choix de la variable d'état mnésique

# Choix de la variable d'état mnésique

## Réécriture du critère de limite élastique :

# Choix de la variable d'état mnésique



## Réécriture du critère de limite élastique :

On pose $\gamma = \sqrt{3}\sqrt{\delta^{2/3} - 1}$

# Choix de la variable d'état mnésique



## Réécriture du critère de limite élastique :

On pose $\gamma = \sqrt{3}\sqrt{\delta^{2/3} - 1}$ et $\gamma_{lim} = \sqrt{3}\sqrt{{\delta_{lim}}^{2/3} - 1}$

# Choix de la variable d'état mnésique

## Réécriture du critère de limite élastique :

On pose $\gamma = \sqrt{3}\sqrt{\delta^{2/3} - 1}$ et $\gamma_{lim} = \sqrt{3}\sqrt{\delta_{lim}{}^{2/3} - 1}$

Le critère $\gamma \leq \gamma_{lim}$ est équivalent à $\delta \leq \delta_{lim}$.

# Choix de la variable d'état mnésique



## Réécriture du critère de limite élastique :

On pose $\gamma = \sqrt{3}\sqrt{\delta^{2/3}-1}$ et $\gamma_{lim} = \sqrt{3}\sqrt{\delta_{lim}{}^{2/3}-1}$

Le critère $\gamma \leq \gamma_{lim}$ est équivalent à $\delta \leq \delta_{lim}$.

(car la fonction $x \to \sqrt{3}\sqrt{x^{2/3}-1}$ est monotone croissante pour $x \geqslant 1$)

# Choix de la variable d'état mnésique



## Réécriture du critère de limite élastique :

On pose $\gamma = \sqrt{3}\sqrt{\delta^{2/3}-1}$ et $\gamma_{lim} = \sqrt{3}\sqrt{{\delta_{lim}}^{2/3}-1}$

Le critère $\gamma \leq \gamma_{lim}$ est équivalent à $\delta \leq \delta_{lim}$.

(car la fonction $x \to \sqrt{3}\sqrt{x^{2/3}-1}$ est monotone croissante pour $x \geqslant 1$)

## Interprétation cinématique :

# Choix de la variable d'état mnésique



## Réécriture du critère de limite élastique :

On pose $\gamma = \sqrt{3}\sqrt{\delta^{2/3} - 1}$ et $\gamma_{lim} = \sqrt{3}\sqrt{{\delta_{lim}}^{2/3} - 1}$

Le critère $\gamma \leq \gamma_{lim}$ est équivalent à $\delta \leq \delta_{lim}$.

(car la fonction $x \to \sqrt{3}\sqrt{x^{2/3} - 1}$ est monotone croissante pour $x \geqslant 1$)

## Interprétation cinématique :

$\gamma$ est le paramètre $|u|/h$ dans un mouvement de glissement.

# Choix de la variable d'état mnésique



## Réécriture du critère de limite élastique :

On pose $\gamma = \sqrt{3}\sqrt{\delta^{2/3}-1}$ et $\gamma_{lim} = \sqrt{3}\sqrt{{\delta_{lim}}^{2/3}-1}$

Le critère $\gamma \leq \gamma_{lim}$ est équivalent à $\delta \leq \delta_{lim}$.

(car la fonction $x \to \sqrt{3}\sqrt{x^{2/3}-1}$ est monotone croissante pour $x \geqslant 1$)

## Interprétation cinématique :

$\gamma$ est le paramètre $|u|/h$ dans un mouvement de glissement.

(la cinématique d'un glissement a été étudiée en élasticité)

# Choix de la variable d'état mnésique



## Réécriture du critère de limite élastique :

On pose $\gamma = \sqrt{3}\sqrt{\delta^{2/3} - 1}$ et $\gamma_{lim} = \sqrt{3}\sqrt{{\delta_{lim}}^{2/3} - 1}$

Le critère $\gamma \leq \gamma_{lim}$ est équivalent à $\delta \leq \delta_{lim}$.

(car la fonction $x \to \sqrt{3}\sqrt{x^{2/3} - 1}$ est monotone croissante pour $x \geqslant 1$)

## Interprétation cinématique :

$\gamma$ est le paramètre $|u|/h$ dans un mouvement de glissement.

(la cinématique d'un glissement a été étudiée en élasticité)

### Choix de la variable d'etat mnésique

$$p(t) = \sup_{\tau \in [t_0\,;t]} \langle \gamma(\tau) - \gamma_{lim} \rangle$$

# Choix de la variable d'état mnésique



## Réécriture du critère de limite élastique :

On pose $\gamma = \sqrt{3}\sqrt{\delta^{2/3} - 1}$ et $\gamma_{lim} = \sqrt{3}\sqrt{{\delta_{lim}}^{2/3} - 1}$

Le critère $\gamma \leq \gamma_{lim}$ est équivalent à $\delta \leq \delta_{lim}$.

(car la fonction $x \to \sqrt{3}\sqrt{x^{2/3} - 1}$ est monotone croissante pour $x \geqslant 1$)

## Interprétation cinématique :

$\gamma$ est le paramètre $|u|/h$ dans un mouvement de glissement.

(la cinématique d'un glissement a été étudiée en élasticité)

### Choix de la variable d'etat mnésique

$$p(t) = \sup_{\tau \in [t_0\,;t]} \langle \gamma(\tau) - \gamma_{lim} \rangle \quad \text{où } \langle x \rangle = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

# Choix de la variable d'état mnésique



## Réécriture du critère de limite élastique :

On pose $\gamma = \sqrt{3}\sqrt{\delta^{2/3}-1}$ et $\gamma_{lim} = \sqrt{3}\sqrt{\delta_{lim}{}^{2/3}-1}$

Le critère $\gamma \leq \gamma_{lim}$ est équivalent à $\delta \leq \delta_{lim}$.

(car la fonction $x \rightarrow \sqrt{3}\sqrt{x^{2/3}-1}$ est monotone croissante pour $x \geqslant 1$)

## Interprétation cinématique :

$\gamma$ est le paramètre $|u|/h$ dans un mouvement de glissement.

(la cinématique d'un glissement a été étudiée en élasticité)

### Choix de la variable d'etat mnésique

$$p(t) = \sup_{\tau \in [t_0\,;t]} \langle \gamma(\tau) - \gamma_{lim} \rangle \quad \text{où } \langle x \rangle = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

(« partie positive » de $x$)

# Choix de la variable d'état mnésique



## Réécriture du critère de limite élastique :

On pose $\gamma = \sqrt{3}\sqrt{\delta^{2/3}-1}$ et $\gamma_{lim} = \sqrt{3}\sqrt{{\delta_{lim}}^{2/3}-1}$

Le critère $\gamma \leq \gamma_{lim}$ est équivalent à $\delta \leq \delta_{lim}$.

(car la fonction $x \to \sqrt{3}\sqrt{x^{2/3}-1}$ est monotone croissante pour $x \geqslant 1$)

## Interprétation cinématique :

$\gamma$ est le paramètre $|u|/h$ dans un mouvement de glissement.

(la cinématique d'un glissement a été étudiée en élasticité)

### Choix de la variable d'etat mnésique

$$p(t) = \sup_{\tau \in [t_0\,;t]} \langle \gamma(\tau) - \gamma_{lim} \rangle \quad \text{où } \langle x \rangle = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

(« partie positive » de $x$)

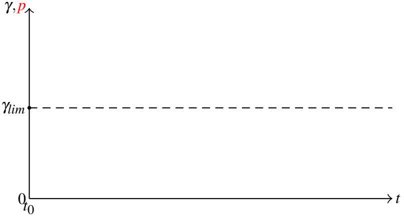
La valeur actuelle $p(t)$ enregistre le plus grand dépassement de la limite élastique $\gamma_{lim}$ depuis l'instant de référence $t_0$.

# Propriétés de la variable mnésique

**Rappel :** $$p(t) = \sup_{\tau \in [t_0\,;t]} \langle \gamma(\tau) - \gamma_{lim} \rangle$$

# Propriétés de la variable mnésique

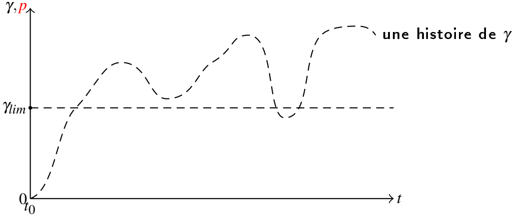
**Rappel :** $$p(t) = \sup_{\tau \in [t_0\,; t]} \langle \gamma(\tau) - \gamma_{lim} \rangle$$




Choix de la variable mnésique
Loi d'évolution
Comportement mécanique
Récapitulation
Construction d'une énergie libre
Variantes possibles
Illustrations numériques
Synthèse

# Propriétés de la variable mnésique

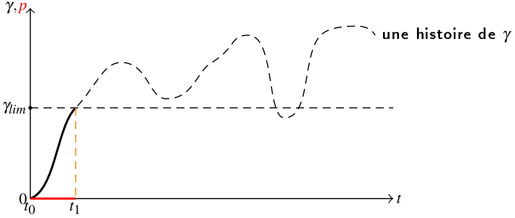
**Rappel :** $$p(t) = \sup_{\tau \in [t_0\,;t]} \langle \gamma(\tau) - \gamma_{lim} \rangle$$



# Propriétés de la variable mnésique

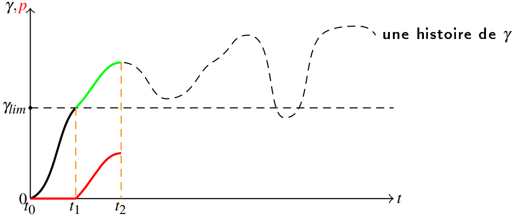


**Rappel :** $$p(t) = \sup_{\tau \in [t_0\,;t]} \langle \gamma(\tau) - \gamma_{lim} \rangle$$



# Propriétés de la variable mnésique

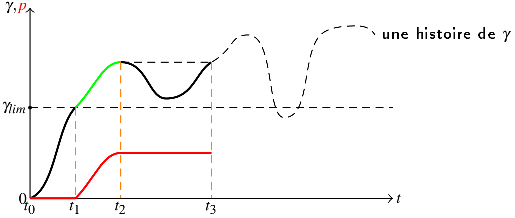
**Rappel :** $$p(t) = \sup_{\tau \in [t_0\,;t]} \langle \gamma(\tau) - \gamma_{lim} \rangle$$



# Propriétés de la variable mnésique

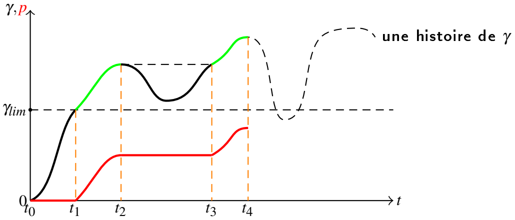


**Rappel :** $$p(t) = \sup_{\tau \in [t_0\,;t]} \langle \gamma(\tau) - \gamma_{lim} \rangle$$



# Propriétés de la variable mnésique

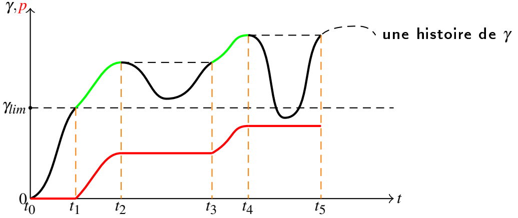
**Rappel :** $$p(t) = \sup_{\tau \in [t_0\,;t]} \langle \gamma(\tau) - \gamma_{lim} \rangle$$



# Propriétés de la variable mnésique



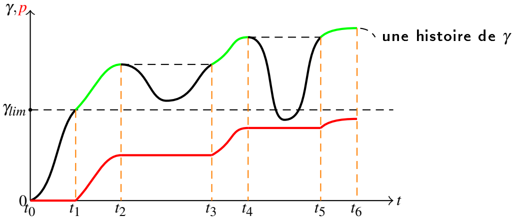
**Rappel :** $$p(t) = \sup_{\tau \in [t_0\,;t]} \langle \gamma(\tau) - \gamma_{lim} \rangle$$



# Propriétés de la variable mnésique

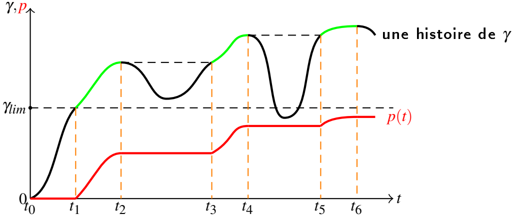


**Rappel :** $$p(t) = \sup_{\tau \in [t_0\,;t]} \langle \gamma(\tau) - \gamma_{lim} \rangle$$



# Propriétés de la variable mnésique

**Rappel :** $p(t) = \sup\limits_{\tau \in [t_0\,;t]} \langle \gamma(\tau) - \gamma_{lim} \rangle$

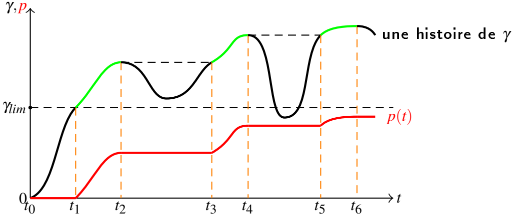


# Propriétés de la variable mnésique



## Rappel :

$$p(t) = \sup_{\tau \in [t_0\,;t]} \langle \gamma(\tau) - \gamma_{lim} \rangle$$

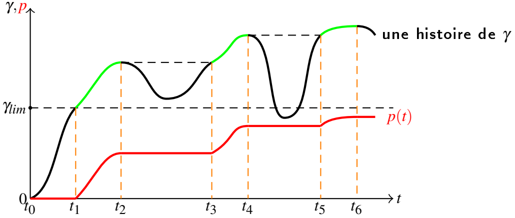



## Propriétés de $p$ :

# Propriétés de la variable mnésique



**Rappel :** $p(t) = \sup_{\tau \in [t_0\,;t]} \langle \gamma(\tau) - \gamma_{lim} \rangle$

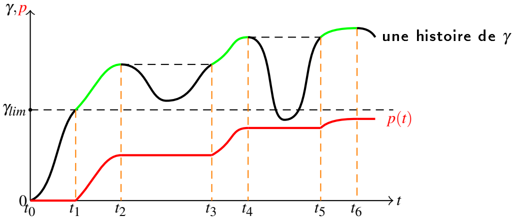



**Propriétés de $p$ :** (démonstrations dans le pdf)

# Propriétés de la variable mnésique



## Rappel : $p(t) = \sup_{\tau \in [t_0\,;t]} \langle \gamma(\tau) - \gamma_{lim} \rangle$



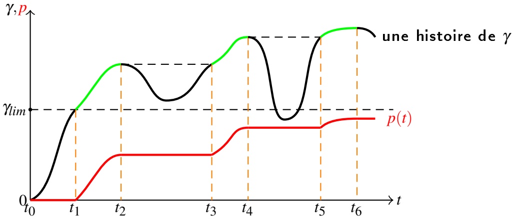

## Propriétés de $p$ : (démonstrations dans le pdf)

- La variable mnésique $p$ est scalaire, objective et non négative.

# Propriétés de la variable mnésique



## Rappel : $p(t) = \sup_{\tau \in [t_0\,;t]} \langle \gamma(\tau) - \gamma_{lim} \rangle$




## Propriétés de $p$ : (démonstrations dans le pdf)

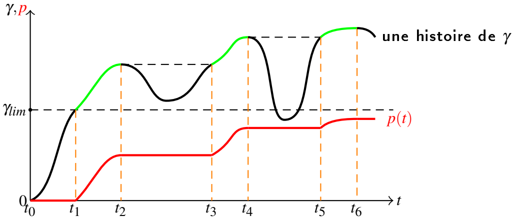
- La variable mnésique $p$ est scalaire, objective et non négative.
- Pour tout état : $\gamma - p \leq \gamma_{lim}$.

# Propriétés de la variable mnésique



## Rappel :

$$p(t) = \sup_{\tau \in [t_0\,;t]} \langle \gamma(\tau) - \gamma_{lim} \rangle$$




## Propriétés de $p$ :

(démonstrations dans le pdf)

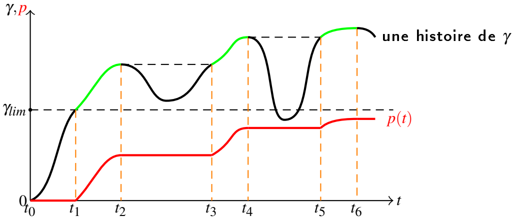
- La variable mnésique $p$ est scalaire, objective et non négative.
- Pour tout état : $\gamma - p \leq \gamma_{lim}$.
- L'espace des état $\mathbb{R}^{m+2}$ est donc limité par une frontière :

$$f_\gamma(I_1, \cdots, I_m) - p \leq \gamma_{lim},$$

# Propriétés de la variable mnésique



## Rappel : $p(t) = \sup_{\tau \in [t_0\,;t]} \langle \gamma(\tau) - \gamma_{lim} \rangle$




## Propriétés de $p$ : (démonstrations dans le pdf)

- La variable mnésique $p$ est scalaire, objective et non négative.
- Pour tout état : $\gamma - p \leq \gamma_{lim}$.
- L'espace des état $\mathbb{R}^{m+2}$ est donc limité par une frontière :

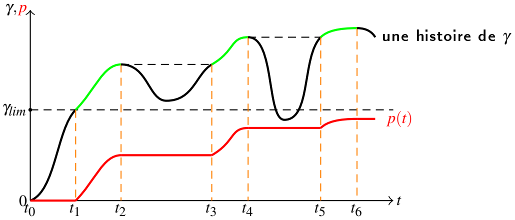
  $$f_\gamma(I_1, \cdots, I_m) - p \leq \gamma_{lim},$$

  ce qui définit un espace des états admissibles pour ce modèle.

# Propriétés de la variable mnésique



**Rappel :** $$p(t) = \sup_{\tau \in [t_0\,;t]} \langle \gamma(\tau) - \gamma_{lim} \rangle$$




## Propriétés de $p$ : (démonstrations dans le pdf)

- La variable mnésique $p$ est scalaire, objective et non négative.
- Pour tout état : $\gamma - p \leq \gamma_{lim}$.
- L'espace des état $\mathbb{R}^{m+2}$ est donc limité par une frontière :
  $$f_\gamma(I_1, \cdots, I_m) - p \leq \gamma_{lim},$$
  ce qui définit un espace des états admissibles pour ce modèle.

($\gamma$ peut être l'une des variables d'état cinématiques $\{I_1, \cdots, I_m\}$ retenues pour le modèle)

# Loi d'évolution

# Loi d'évolution

## Définition

On appelle « loi d'évolution » de la variable mnésique $p$, l'expression de sa dérivée particulaire $\dot{p}$.

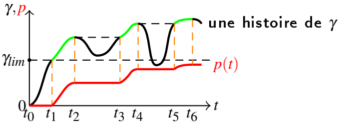
# Loi d'évolution



## Définition

On appelle « loi d'évolution » de la variable mnésique $p$, l'expression de sa dérivée particulaire $\dot{p}$.

$$p(t) = \sup_{\tau \in [t_0\,;t]} \langle \gamma(\tau) - \gamma_{lim} \rangle$$

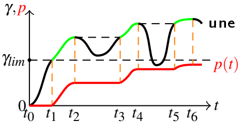


# Loi d'évolution

## Définition

On appelle « loi d'évolution » de la variable mnésique $p$, l'expression de sa dérivée particulaire $\dot{p}$.

$$p(t) = \sup_{\tau \in [t_0\,;t]} \langle \gamma(\tau) - \gamma_{lim} \rangle$$




$$\dot{p} = \begin{cases} \langle \dot{\gamma} \rangle & \text{si } \gamma(t) - p(t) = \gamma_{lim} \\ & \end{cases}$$

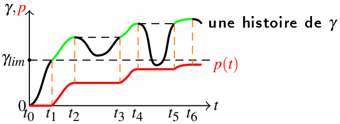
# Loi d'évolution



## Définition

On appelle « loi d'évolution » de la variable mnésique $p$, l'expression de sa dérivée particulaire $\dot{p}$.

$$p(t) = \sup_{\tau \in [t_0\,;t]} \langle \gamma(\tau) - \gamma_{lim} \rangle$$




$$\dot{p} = \begin{cases} \langle \dot{\gamma} \rangle & \text{si } \gamma(t) - p(t) = \gamma_{lim} \\ 0 & \text{si } \gamma(t) - p(t) < \gamma_{lim} \end{cases}$$

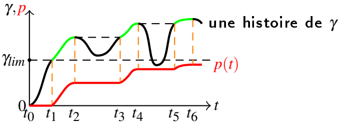
# Loi d'évolution



## Définition

On appelle « loi d'évolution » de la variable mnésique $p$, l'expression de sa dérivée particulaire $\dot{p}$.

$$p(t) = \sup_{\tau \in [t_0\,;t]} \langle \gamma(\tau) - \gamma_{lim} \rangle$$




$$\dot{p} = \begin{cases} \langle \dot{\gamma} \rangle & \text{si } \gamma(t) - p(t) = \gamma_{lim} \\ 0 & \text{si } \gamma(t) - p(t) < \gamma_{lim} \end{cases}$$

(état actuel **sur la frontière** des états admissibles)

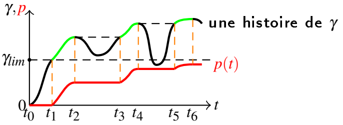
# Loi d'évolution



## Définition

On appelle « loi d'évolution » de la variable mnésique $p$, l'expression de sa dérivée particulaire $\dot{p}$.

$$p(t) = \sup_{\tau \in [t_0\,;t]} \langle \gamma(\tau) - \gamma_{lim} \rangle$$




$$\dot{p} = \begin{cases} \langle \dot{\gamma} \rangle & \text{si } \gamma(t) - p(t) = \gamma_{lim} \\ 0 & \text{si } \gamma(t) - p(t) < \gamma_{lim} \end{cases}$$

(état actuel **sur la frontière** des états admissibles)

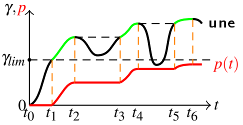
(état actuel **à l'intérieur** des états admissibles)

# Loi d'évolution

## Définition

On appelle « loi d'évolution » de la variable mnésique $p$, l'expression de sa dérivée particulaire $\dot{p}$.

$$p(t) = \sup_{\tau \in [t_0\,;t]} \langle \gamma(\tau) - \gamma_{lim} \rangle$$




$$\dot{p} = \begin{cases} \langle \dot{\gamma} \rangle & \text{si } \gamma(t) - p(t) = \gamma_{lim} \\ 0 & \text{si } \gamma(t) - p(t) < \gamma_{lim} \end{cases}$$

(état actuel sur la frontière des états admissibles)
(état actuel à l'intérieur des états admissibles)

$$\dot{p} = \mathscr{H}(\gamma - p - \gamma_{lim}) \langle \dot{\gamma} \rangle$$

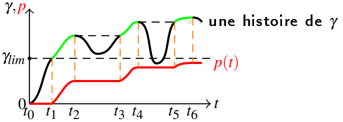
# Loi d'évolution



## Définition

On appelle « loi d'évolution » de la variable mnésique $p$, l'expression de sa dérivée particulaire $\dot{p}$.

$$p(t) = \sup_{\tau \in [t_0\,;t]} \langle \gamma(\tau) - \gamma_{lim} \rangle$$




$$\dot{p} = \begin{cases} \langle \dot{\gamma} \rangle & \text{si } \gamma(t) - p(t) = \gamma_{lim} \\ 0 & \text{si } \gamma(t) - p(t) < \gamma_{lim} \end{cases}$$

(état actuel sur la frontière des états admissibles)
(état actuel à l'intérieur des états admissibles)

$$\dot{p} = \mathscr{H}(\gamma - p - \gamma_{lim})\,\langle \dot{\gamma} \rangle \quad \text{où } \mathscr{H}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

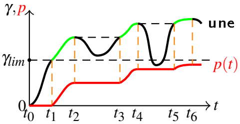
# Loi d'évolution



## Définition

On appelle « loi d'évolution » de la variable mnésique $p$, l'expression de sa dérivée particulaire $\dot{p}$.

$$p(t) = \sup_{\tau \in [t_0\,;t]} \langle \gamma(\tau) - \gamma_{lim} \rangle$$




$$\dot{p} = \begin{cases} \langle \dot{\gamma} \rangle & \text{si } \gamma(t) - p(t) = \gamma_{lim} \\ 0 & \text{si } \gamma(t) - p(t) < \gamma_{lim} \end{cases}$$

(état actuel sur la frontière des états admissibles)
(état actuel à l'intérieur des états admissibles)

$$\dot{p} = \mathscr{H}(\gamma - p - \gamma_{lim})\,\langle \dot{\gamma} \rangle \quad \text{où } \mathscr{H}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

($\sim$ Heaviside)

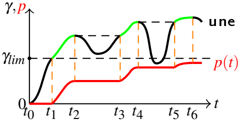
# Loi d'évolution



## Définition

On appelle « loi d'évolution » de la variable mnésique $p$, l'expression de sa dérivée particulaire $\dot{p}$.

$$p(t) = \sup_{\tau \in [t_0\,;t]} \langle \gamma(\tau) - \gamma_{lim} \rangle$$




$$\dot{p} = \begin{cases} \langle \dot{\gamma} \rangle & \text{si } \gamma(t) - p(t) = \gamma_{lim} \\ 0 & \text{si } \gamma(t) - p(t) < \gamma_{lim} \end{cases}$$

(état actuel sur la frontière des états admissibles)
(état actuel à l'intérieur des états admissibles)

$$\dot{p} = \mathscr{H}(\gamma - p - \gamma_{lim}) \langle \dot{\gamma} \rangle \quad \text{où } \mathscr{H}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

($\sim$ Heaviside)

## Quelques calculs cinématiques :

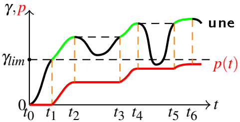
# Loi d'évolution



## Définition

On appelle « loi d'évolution » de la variable mnésique $p$, l'expression de sa dérivée particulaire $\dot{p}$.

$$p(t) = \sup_{\tau\in[t_0\,;t]} \langle \gamma(\tau) - \gamma_{lim} \rangle$$




$$\dot{p} = \begin{cases} \langle \dot{\gamma} \rangle & \text{si } \gamma(t) - p(t) = \gamma_{lim} \\ 0 & \text{si } \gamma(t) - p(t) < \gamma_{lim} \end{cases}$$

(état actuel sur la frontière des états admissibles)
(état actuel à l'intérieur des états admissibles)

$$\dot{p} = \mathscr{H}(\gamma - p - \gamma_{lim})\,\langle \dot{\gamma} \rangle \quad \text{où } \mathscr{H}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

($\sim$ Heaviside)

**Quelques calculs cinématiques :** (démonstrations dans le pdf)

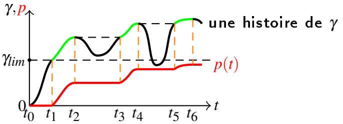
# Loi d'évolution



## Définition

On appelle « loi d'évolution » de la variable mnésique $p$, l'expression de sa dérivée particulaire $\dot{p}$.

$$p(t) = \sup_{\tau \in [t_0\,;t]} \langle \gamma(\tau) - \gamma_{lim} \rangle$$




$$\dot{p} = \begin{cases} \langle \dot{\gamma} \rangle & \text{si } \gamma(t) - p(t) = \gamma_{lim} \\ 0 & \text{si } \gamma(t) - p(t) < \gamma_{lim} \end{cases}$$

(état actuel sur la frontière des états admissibles)
(état actuel à l'intérieur des états admissibles)

$$\dot{p} = \mathscr{H}(\gamma - p - \gamma_{lim}) \langle \dot{\gamma} \rangle \quad \text{où } \mathscr{H}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

($\sim$ Heaviside)

## Quelques calculs cinématiques :

(démonstrations dans le pdf)

$$\dot{\gamma} = \boldsymbol{S}_\gamma : \boldsymbol{D}$$

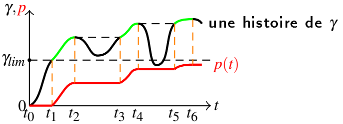
# Loi d'évolution



## Définition

On appelle « loi d'évolution » de la variable mnésique $p$, l'expression de sa dérivée particulaire $\dot{p}$.

$$p(t) = \sup_{\tau \in [t_0\,;t]} \langle \gamma(\tau) - \gamma_{lim} \rangle$$




$$\dot{p} = \begin{cases} \langle \dot{\gamma} \rangle & \text{si } \gamma(t) - p(t) = \gamma_{lim} \\ 0 & \text{si } \gamma(t) - p(t) < \gamma_{lim} \end{cases}$$

(état actuel sur la frontière des états admissibles)
(état actuel à l'intérieur des états admissibles)

$$\dot{p} = \mathscr{H}(\gamma - p - \gamma_{lim}) \langle \dot{\gamma} \rangle \quad \text{où } \mathscr{H}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

($\sim$ Heaviside)

## Quelques calculs cinématiques :

(démonstrations dans le pdf)

$$\dot{\gamma} = \boldsymbol{S}_\gamma : \boldsymbol{D} \quad \text{où} \quad \boldsymbol{S}_\gamma = \frac{1}{\gamma}\left(\frac{\boldsymbol{B}}{K_v{}^{2/3}} - \boldsymbol{G}\right) - \frac{\gamma}{3}\boldsymbol{G}$$

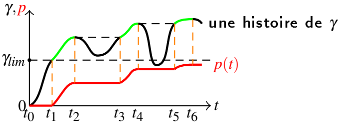
# Loi d'évolution



## Définition

On appelle « loi d'évolution » de la variable mnésique $p$, l'expression de sa dérivée particulaire $\dot{p}$.

$$p(t) = \sup_{\tau\in[t_0\,;t]} \langle \gamma(\tau) - \gamma_{lim} \rangle$$




$$\dot{p} = \begin{cases} \langle \dot{\gamma} \rangle & \text{si } \gamma(t) - p(t) = \gamma_{lim} \\ 0 & \text{si } \gamma(t) - p(t) < \gamma_{lim} \end{cases}$$

(état actuel sur la frontière des états admissibles)
(état actuel à l'intérieur des états admissibles)

$$\dot{p} = \mathscr{H}(\gamma - p - \gamma_{lim})\,\langle \dot{\gamma} \rangle \quad \text{où } \mathscr{H}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

($\sim$ Heaviside)

### Quelques calculs cinématiques :

(démonstrations dans le pdf)

$$\dot{\gamma} = \boldsymbol{S}_\gamma : \boldsymbol{D} \quad \text{où} \quad \boldsymbol{S}_\gamma = \frac{1}{\gamma}\left(\frac{\boldsymbol{B}}{K_v{}^{2/3}} - \boldsymbol{G}\right) - \frac{\gamma}{3}\boldsymbol{G} \quad \text{et} \quad \operatorname{tr}\boldsymbol{S}_\gamma = 0$$

($S_\gamma$ est un déviateur)

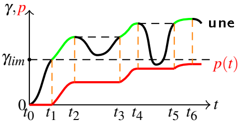
# Loi d'évolution



## Définition

On appelle « loi d'évolution » de la variable mnésique $p$, l'expression de sa dérivée particulaire $\dot{p}$.

$$p(t) = \sup_{\tau \in [t_0\,;t]} \langle \gamma(\tau) - \gamma_{lim} \rangle$$




$$\dot{p} = \begin{cases} \langle \dot{\gamma} \rangle & \text{si } \gamma(t) - p(t) = \gamma_{lim} \\ 0 & \text{si } \gamma(t) - p(t) < \gamma_{lim} \end{cases}$$ (état actuel sur la frontière des états admissibles) (état actuel à l'intérieur des états admissibles)

$$\dot{p} = \mathscr{H}(\gamma - p - \gamma_{lim})\,\langle \dot{\gamma} \rangle \quad \text{où } \mathscr{H}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$ ($\sim$ Heaviside)

## Quelques calculs cinématiques : (démonstrations dans le pdf)

$$\dot{\gamma} = \boldsymbol{S}_\gamma : \boldsymbol{D} \quad \text{où} \quad \boldsymbol{S}_\gamma = \frac{1}{\gamma}\left(\frac{\boldsymbol{B}}{K_v{}^{2/3}} - \boldsymbol{G}\right) - \frac{\gamma}{3}\boldsymbol{G} \quad \text{et} \quad \mathrm{tr}\,\boldsymbol{S}_\gamma = 0$$ ($S_\gamma$ est un déviateur)

Remarque : Si la déformation devient sphérique

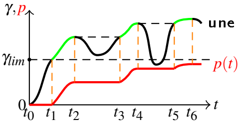
# Loi d'évolution



## Définition

On appelle « loi d'évolution » de la variable mnésique $p$, l'expression de sa dérivée particulaire $\dot{p}$.

$$p(t) = \sup_{\tau \in [t_0\,;t]} \langle \gamma(\tau) - \gamma_{lim} \rangle$$




$$\dot{p} = \begin{cases} \langle \dot{\gamma} \rangle & \text{si } \gamma(t) - p(t) = \gamma_{lim} \\ 0 & \text{si } \gamma(t) - p(t) < \gamma_{lim} \end{cases}$$ (état actuel sur la frontière des états admissibles) (état actuel à l'intérieur des états admissibles)

$$\dot{p} = \mathscr{H}(\gamma - p - \gamma_{lim})\,\langle \dot{\gamma} \rangle \quad \text{où } \mathscr{H}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$ ($\sim$ Heaviside)

## Quelques calculs cinématiques :

(démonstrations dans le pdf)

$$\dot{\gamma} = \boldsymbol{S}_\gamma : \boldsymbol{D} \quad \text{où} \quad \boldsymbol{S}_\gamma = \frac{1}{\gamma}\left(\frac{\boldsymbol{B}}{K_v{}^{2/3}} - \boldsymbol{G}\right) - \frac{\gamma}{3}\boldsymbol{G} \quad \text{et} \quad \mathrm{tr}\,\boldsymbol{S}_\gamma = 0$$ ($S_\gamma$ est un déviateur)

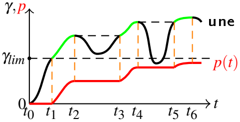
Remarque : Si la déformation devient sphérique ($\boldsymbol{B} \to K_v{}^{2/3}\boldsymbol{G}$ et $\gamma \to 0$)

# Loi d'évolution

## Définition

On appelle « loi d'évolution » de la variable mnésique $p$, l'expression de sa dérivée particulaire $\dot{p}$.

$$p(t) = \sup_{\tau \in [t_0\,;t]} \langle \gamma(\tau) - \gamma_{lim} \rangle$$




$$\dot{p} = \begin{cases} \langle \dot{\gamma} \rangle & \text{si } \gamma(t) - p(t) = \gamma_{lim} \\ 0 & \text{si } \gamma(t) - p(t) < \gamma_{lim} \end{cases}$$

(état actuel sur la frontière des états admissibles)
(état actuel à l'intérieur des états admissibles)

$$\dot{p} = \mathscr{H}(\gamma - p - \gamma_{lim}) \langle \dot{\gamma} \rangle \quad \text{où } \mathscr{H}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

($\sim$ Heaviside)

## Quelques calculs cinématiques :

(démonstrations dans le pdf)

$$\dot{\gamma} = \boldsymbol{S}_\gamma : \boldsymbol{D} \quad \text{où} \quad \boldsymbol{S}_\gamma = \frac{1}{\gamma}\left(\frac{\boldsymbol{B}}{{K_v}^{2/3}} - \boldsymbol{G}\right) - \frac{\gamma}{3}\boldsymbol{G} \quad \text{et} \quad \operatorname{tr}\boldsymbol{S}_\gamma = 0$$

($S_\gamma$ est un déviateur)

Remarque : Si la déformation devient sphérique ($\boldsymbol{B} \to {K_v}^{2/3}\boldsymbol{G}$ et $\gamma \to 0$)

$$\lim_{\gamma \to 0} \frac{1}{\gamma}\left(\frac{\boldsymbol{B}}{{K_v}^{2/3}} - \boldsymbol{G}\right) =$$

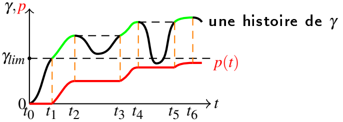
# Loi d'évolution



## Définition

On appelle « loi d'évolution » de la variable mnésique $p$, l'expression de sa dérivée particulaire $\dot{p}$.

$$p(t) = \sup_{\tau\in[t_0\,;t]} \langle \gamma(\tau) - \gamma_{lim} \rangle$$




$$\dot{p} = \begin{cases} \langle \dot{\gamma} \rangle & \text{si } \gamma(t) - p(t) = \gamma_{lim} \\ 0 & \text{si } \gamma(t) - p(t) < \gamma_{lim} \end{cases}$$

(état actuel sur la frontière des états admissibles)
(état actuel à l'intérieur des états admissibles)

$$\dot{p} = \mathscr{H}(\gamma - p - \gamma_{lim}) \langle \dot{\gamma} \rangle \quad \text{où } \mathscr{H}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

($\sim$ Heaviside)

## Quelques calculs cinématiques :

(démonstrations dans le pdf)

$$\dot{\gamma} = \boldsymbol{S}_\gamma : \boldsymbol{D} \quad \text{où} \quad \boldsymbol{S}_\gamma = \frac{1}{\gamma}\left(\frac{\boldsymbol{B}}{K_v{}^{2/3}} - \boldsymbol{G}\right) - \frac{\gamma}{3}\boldsymbol{G} \quad \text{et} \quad \mathrm{tr}\,\boldsymbol{S}_\gamma = 0$$

($S_\gamma$ est un déviateur)

Remarque : Si la déformation devient sphérique ($\boldsymbol{B} \to K_v{}^{2/3}\boldsymbol{G}$ et $\gamma \to 0$)

$$\lim_{\gamma\to 0} \frac{1}{\gamma}\left(\frac{\boldsymbol{B}}{K_v{}^{2/3}} - \boldsymbol{G}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(3 \lim_{\gamma\to 0} \boldsymbol{E}_1^V - \boldsymbol{G}\right)$$

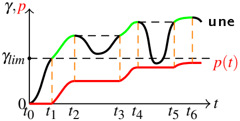
# Loi d'évolution



## Définition

On appelle « loi d'évolution » de la variable mnésique $p$, l'expression de sa dérivée particulaire $\dot{p}$.

$$p(t) = \sup_{\tau\in[t_0\,;t]} \langle \gamma(\tau) - \gamma_{lim} \rangle$$




$$\dot{p} = \begin{cases} \langle \dot{\gamma} \rangle & \text{si } \gamma(t) - p(t) = \gamma_{lim} \\ 0 & \text{si } \gamma(t) - p(t) < \gamma_{lim} \end{cases}$$ (état actuel sur la frontière des états admissibles) (état actuel à l'intérieur des états admissibles)

$$\dot{p} = \mathscr{H}(\gamma - p - \gamma_{lim})\,\langle \dot{\gamma} \rangle \quad \text{où } \mathscr{H}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$ ($\sim$ Heaviside)

## Quelques calculs cinématiques :

(démonstrations dans le pdf)

$$\dot{\gamma} = \boldsymbol{S}_\gamma : \boldsymbol{D} \quad \text{où} \quad \boldsymbol{S}_\gamma = \frac{1}{\gamma}\left(\frac{\boldsymbol{B}}{{K_v}^{2/3}} - \boldsymbol{G}\right) - \frac{\gamma}{3}\boldsymbol{G} \quad \text{et} \quad \mathrm{tr}\,\boldsymbol{S}_\gamma = 0$$ ($S_\gamma$ est un déviateur)

Remarque : Si la déformation devient sphérique ($\boldsymbol{B} \to {K_v}^{2/3}\boldsymbol{G}$ et $\gamma \to 0$)

$$\lim_{\gamma\to 0} \frac{1}{\gamma}\left(\frac{\boldsymbol{B}}{{K_v}^{2/3}} - \boldsymbol{G}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(3 \lim_{\gamma\to 0} \boldsymbol{E}_1^V - \boldsymbol{G}\right)$$ (utile pour l'implémentation numérique)

# Comportement mécanique (1/2)

# Comportement mécanique (1/2)

## Dissipation intrinsèque :

# Comportement mécanique (1/2)

## Dissipation intrinsèque :

$\forall \dot{T} \; \forall \boldsymbol{D},$ (pour toute vitesse d'évolution à partir de tout état)

# Comportement mécanique (1/2)



## Dissipation intrinsèque :

$\forall \dot{T}\ \forall \boldsymbol{D}$, (pour toute vitesse d'évolution à partir de tout état)

$$\Phi_{int} = -\rho\,(\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s)\,\dot{T} + (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref}) : \boldsymbol{D} - \rho\,\partial_p \bar{f}_\psi\,\dot{p} \geqslant 0$$

($\alpha$ remplacé par $p$)

# Comportement mécanique (1/2)



## Dissipation intrinsèque :

$\forall \dot{T}\ \forall \boldsymbol{D}$, (pour toute vitesse d'évolution à partir de tout état)

$$\Phi_{int} = -\rho\,(\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s)\,\dot{T} + (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref}) : \boldsymbol{D} - \rho\,\partial_p \bar{f}_\psi\,\dot{p} \geqslant 0 \qquad (\alpha \text{ remplacé par } p)$$

$$\Phi_{int} = -\rho\,(\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s)\,\dot{T} + (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref}) : \boldsymbol{D} - \rho\,\partial_p \bar{f}_\psi\,\mathscr{H}(\gamma - p - \gamma_{lim})\,\langle \boldsymbol{S}_\gamma : \boldsymbol{D} \rangle \geqslant 0$$

# Comportement mécanique (1/2)



## Dissipation intrinsèque :

$\forall \dot{T}\; \forall \boldsymbol{D}$, (pour toute vitesse d'évolution à partir de tout état)

$$\Phi_{int} = -\rho\,(\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s)\,\dot{T} + (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_{ref}^{(p)}) : \boldsymbol{D} - \rho\,\partial_p \bar{f}_\psi\,\dot{p} \geqslant 0 \qquad (\alpha \text{ remplacé par } p)$$

$$\Phi_{int} = -\rho\,(\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s)\,\dot{T} + \underbrace{(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_{ref}^{(p)}) : \boldsymbol{D} - \rho\,\partial_p \bar{f}_\psi\,\mathscr{H}(\gamma - p - \gamma_{lim})\,\langle \boldsymbol{S}_\gamma : \boldsymbol{D}\rangle}_{\text{indépendant de } \dot{T}} \geqslant 0$$

# Comportement mécanique (1/2)



## Dissipation intrinsèque :

$\forall \dot{T}\ \forall \boldsymbol{D}$, (pour toute vitesse d'évolution à partir de tout état)

$$\Phi_{int} = -\rho\,(\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s)\,\dot{T} + (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref}) : \boldsymbol{D} - \rho\,\partial_p \bar{f}_\psi\,\dot{p} \geqslant 0$$ ($\alpha$ remplacé par $p$)

$$\Phi_{int} = -\rho\,(\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s)\,\dot{T} + \underbrace{(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref}) : \boldsymbol{D} - \rho\,\partial_p \bar{f}_\psi\,\mathscr{H}(\gamma - p - \gamma_{lim})\,\langle \boldsymbol{S}_\gamma : \boldsymbol{D}\rangle}_{\text{indépendant de } \dot{T}} \geqslant 0$$

## Relation de Helmholtz : $\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s = 0$

# Comportement mécanique (1/2)



## Dissipation intrinsèque :

$\forall \dot{T}\ \forall \boldsymbol{D}$, (pour toute vitesse d'évolution à partir de tout état)

$$\Phi_{int} = -\rho\,(\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s)\,\dot{T} + (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref}) : \boldsymbol{D} - \rho\,\partial_p \bar{f}_\psi\,\dot{p} \geqslant 0$$ ($\alpha$ remplacé par $p$)

$$\Phi_{int} = -\rho\,(\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s)\,\dot{T} + \underbrace{(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref}) : \boldsymbol{D} - \rho\,\partial_p \bar{f}_\psi\,\mathscr{H}(\gamma - p - \gamma_{lim})\,\langle \boldsymbol{S}_\gamma : \boldsymbol{D}\rangle}_{\text{indépendant de } \dot{T}} \geqslant 0$$

## Relation de Helmholtz : $\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s = 0$ (raisonnement habituel)

# Comportement mécanique (1/2)



## Dissipation intrinsèque :

$\forall \dot{T}\ \forall \boldsymbol{D}$, (pour toute vitesse d'évolution à partir de tout état)

$$\Phi_{int} = -\rho\,(\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s)\,\dot{T} + (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref}) : \boldsymbol{D} - \rho\,\partial_p \bar{f}_\psi\,\dot{p} \geqslant 0 \qquad (\alpha \text{ remplacé par } p)$$

$$\Phi_{int} = -\rho\,(\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s)\,\dot{T} + \underbrace{(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref}) : \boldsymbol{D} - \rho\,\partial_p \bar{f}_\psi\,\mathscr{H}(\gamma - p - \gamma_{lim})\,\langle \boldsymbol{S}_\gamma : \boldsymbol{D} \rangle}_{\text{indépendant de } \dot{T}} \geqslant 0$$

## Relation de Helmholtz : $\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s = 0$ (raisonnement habituel)

## Comportement mécanique :

# Comportement mécanique (1/2)



## Dissipation intrinsèque :

$\forall \dot{T}\ \forall \boldsymbol{D}$, (pour toute vitesse d'évolution à partir de tout état)

$$\Phi_{int} = -\rho\,(\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s)\,\dot{T} + (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_{ref}^{(p)}) : \boldsymbol{D} - \rho\,\partial_p \bar{f}_\psi\,\dot{p} \geqslant 0$$ ($\alpha$ remplacé par $p$)

$$\Phi_{int} = -\rho\,(\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s)\,\dot{T} + \underbrace{(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_{ref}^{(p)}) : \boldsymbol{D} - \rho\,\partial_p \bar{f}_\psi\,\mathscr{H}(\gamma - p - \gamma_{lim})\,\langle \boldsymbol{S}_\gamma : \boldsymbol{D}\rangle}_{\text{indépendant de } \dot{T}} \geqslant 0$$

## Relation de Helmholtz : $\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s = 0$ (raisonnement habituel)

## Comportement mécanique :

- si $\gamma - p - \gamma_{lim} = 0$

# Comportement mécanique (1/2)



## Dissipation intrinsèque :

$\forall \dot{T}\ \forall \boldsymbol{D}$, (pour toute vitesse d'évolution à partir de tout état)

$$\Phi_{int} = -\rho\,(\partial_T \overline{f}_\psi + \overline{f}_s)\,\dot{T} + (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref}) : \boldsymbol{D} - \rho\,\partial_p \overline{f}_\psi\,\dot{p} \geqslant 0$$ ($\alpha$ remplacé par $p$)

$$\Phi_{int} = -\rho\,(\partial_T \overline{f}_\psi + \overline{f}_s)\,\dot{T} + \underbrace{(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref}) : \boldsymbol{D} - \rho\,\partial_p \overline{f}_\psi\,\mathscr{H}(\gamma - p - \gamma_{lim})\,\langle \boldsymbol{S}_\gamma : \boldsymbol{D} \rangle}_{\text{indépendant de } \dot{T}} \geqslant 0$$

## Relation de Helmholtz : $\partial_T \overline{f}_\psi + \overline{f}_s = 0$ (raisonnement habituel)

## Comportement mécanique :

- si $\gamma - p - \gamma_{lim} = 0$ **et** $\dot{\gamma} = \boldsymbol{S}_\gamma : \boldsymbol{D} > 0$,

# Comportement mécanique (1/2)



## Dissipation intrinsèque :

$\forall \dot{T}\ \forall \boldsymbol{D}$, (pour toute vitesse d'évolution à partir de tout état)

$$\Phi_{int} = -\rho\,(\partial_T \overline{f}_\psi + \overline{f}_s)\,\dot{T} + (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref}) : \boldsymbol{D} - \rho\,\partial_p \overline{f}_\psi\,\dot{p} \geqslant 0$$ ($\alpha$ remplacé par $p$)

$$\Phi_{int} = -\rho\,(\partial_T \overline{f}_\psi + \overline{f}_s)\,\dot{T} + \underbrace{(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref}) : \boldsymbol{D} - \rho\,\partial_p \overline{f}_\psi\,\mathscr{H}(\gamma - p - \gamma_{lim})\,\langle \boldsymbol{S}_\gamma : \boldsymbol{D}\rangle}_{\text{indépendant de } \dot{T}} \geqslant 0$$

## Relation de Helmholtz : $\partial_T \overline{f}_\psi + \overline{f}_s = 0$ (raisonnement habituel)

## Comportement mécanique :

- si $\gamma - p - \gamma_{lim} = 0$ **et** $\dot{\gamma} = \boldsymbol{S}_\gamma : \boldsymbol{D} > 0$, (l'état évolue sur la frontière admissible)

# Comportement mécanique (1/2)



## Dissipation intrinsèque :

$\forall \dot{T}\ \forall \boldsymbol{D}$, (pour toute vitesse d'évolution à partir de tout état)

$$\Phi_{int} = -\rho\,(\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s)\,\dot{T} + (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref}) : \boldsymbol{D} - \rho\,\partial_p \bar{f}_\psi\,\dot{p} \geqslant 0 \qquad (\alpha \text{ remplacé par } p)$$

$$\Phi_{int} = -\rho\,(\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s)\,\dot{T} + \underbrace{(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref}) : \boldsymbol{D} - \rho\,\partial_p \bar{f}_\psi\,\mathscr{H}(\gamma - p - \gamma_{lim})\,\langle \boldsymbol{S}_\gamma : \boldsymbol{D} \rangle}_{\text{indépendant de } \dot{T}} \geqslant 0$$

## Relation de Helmholtz : $\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s = 0$ (raisonnement habituel)

## Comportement mécanique :

- si $\gamma - p - \gamma_{lim} = 0$ **et** $\dot{\gamma} = \boldsymbol{S}_\gamma : \boldsymbol{D} > 0$, (l'état évolue sur la frontière admissible)
  L'évolution est plastifiante ($\dot{p} > 0$).

# Comportement mécanique (1/2)



## Dissipation intrinsèque :

$\forall \dot{T}\ \forall \boldsymbol{D}$, (pour toute vitesse d'évolution à partir de tout état)

$$\Phi_{int} = -\rho\,(\partial_T \overline{f}_\psi + \overline{f}_s)\,\dot{T} + (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref}) : \boldsymbol{D} - \rho\,\partial_p \overline{f}_\psi\,\dot{p} \geqslant 0$$ ($\alpha$ remplacé par $p$)

$$\Phi_{int} = -\rho\,(\partial_T \overline{f}_\psi + \overline{f}_s)\,\dot{T} + \underbrace{(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref}) : \boldsymbol{D} - \rho\,\partial_p \overline{f}_\psi\,\mathscr{H}(\gamma - p - \gamma_{lim})\,\langle \boldsymbol{S}_\gamma : \boldsymbol{D}\rangle}_{\text{indépendant de } \dot{T}} \geqslant 0$$

## Relation de Helmholtz : $\partial_T \overline{f}_\psi + \overline{f}_s = 0$ (raisonnement habituel)

## Comportement mécanique :

- si $\gamma - p - \gamma_{lim} = 0$ **et** $\dot{\gamma} = \boldsymbol{S}_\gamma : \boldsymbol{D} > 0$, (l'état évolue sur la frontière admissible)
  L'évolution est plastifiante ($\dot{p} > 0$).
  $\forall \boldsymbol{D}, \quad \Phi_{int} = (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref} - \rho\,\partial_p \overline{f}_\psi\,\boldsymbol{S}_\gamma) : \boldsymbol{D} \geqslant 0$

# Comportement mécanique (1/2)



## Dissipation intrinsèque :

$\forall \dot{T}\ \forall \boldsymbol{D}$, (pour toute vitesse d'évolution à partir de tout état)

$$\Phi_{int} = -\rho\,(\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s)\,\dot{T} + (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref}) : \boldsymbol{D} - \rho\,\partial_p \bar{f}_\psi\,\dot{p} \geqslant 0 \qquad (\alpha \text{ remplacé par } p)$$

$$\Phi_{int} = -\rho\,(\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s)\,\dot{T} + \underbrace{(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref}) : \boldsymbol{D} - \rho\,\partial_p \bar{f}_\psi\,\mathscr{H}(\gamma - p - \gamma_{lim})\,\langle \boldsymbol{S}_\gamma : \boldsymbol{D}\rangle}_{\text{indépendant de } \dot{T}} \geqslant 0$$

## Relation de Helmholtz : $\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s = 0$ (raisonnement habituel)

## Comportement mécanique :

- si $\gamma - p - \gamma_{lim} = 0$ **et** $\dot{\gamma} = \boldsymbol{S}_\gamma : \boldsymbol{D} > 0$, (l'état évolue sur la frontière admissible)

  L'évolution est plastifiante ($\dot{p} > 0$).

  $\forall \boldsymbol{D}$, $\quad \Phi_{int} = (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref} - \rho\,\partial_p \bar{f}_\psi\,\boldsymbol{S}_\gamma) : \boldsymbol{D} \geqslant 0$

  $\Rightarrow \quad \exists \boldsymbol{f}$ tel que $\quad \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref} + \rho\,\partial_p \bar{f}_\psi\,\boldsymbol{S}_\gamma + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{D}, \cdots)$

# Comportement mécanique (1/2)



## Dissipation intrinsèque :

$\forall \dot{T}\ \forall \boldsymbol{D},$ (pour toute vitesse d'évolution à partir de tout état)

$$\Phi_{int} = -\rho\,(\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s)\,\dot{T} + (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref}) : \boldsymbol{D} - \rho\,\partial_p \bar{f}_\psi\,\dot{p} \geqslant 0 \qquad (\alpha \text{ remplacé par } p)$$

$$\Phi_{int} = -\rho\,(\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s)\,\dot{T} + \underbrace{(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref}) : \boldsymbol{D} - \rho\,\partial_p \bar{f}_\psi\,\mathscr{H}(\gamma - p - \gamma_{lim})\,\langle \boldsymbol{S}_\gamma : \boldsymbol{D}\rangle}_{\text{indépendant de } \dot{T}} \geqslant 0$$

## Relation de Helmholtz : $\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s = 0$ (raisonnement habituel)

## Comportement mécanique :

- si $\gamma - p - \gamma_{lim} = 0$ **et** $\dot{\gamma} = \boldsymbol{S}_\gamma : \boldsymbol{D} > 0$, (l'état évolue sur la frontière admissible)
  L'évolution est plastifiante ($\dot{p} > 0$).
  $\forall \boldsymbol{D},\quad \Phi_{int} = (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref} - \rho\,\partial_p \bar{f}_\psi\,\boldsymbol{S}_\gamma) : \boldsymbol{D} \geqslant 0$
  $\Rightarrow \quad \exists \boldsymbol{f}$ tel que $\quad \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref} + \rho\,\partial_p \bar{f}_\psi \boldsymbol{S}_\gamma + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{D}, \cdots)$
- si $\gamma - p - \gamma_{lim} < 0$ **ou** $\dot{\gamma} = \boldsymbol{S}_\gamma : \boldsymbol{D} \leq 0$,

# Comportement mécanique (1/2)



## Dissipation intrinsèque :

$\forall \dot{T}\ \forall \boldsymbol{D},$ (pour toute vitesse d'évolution à partir de tout état)

$$\Phi_{int} = -\rho\,(\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s)\,\dot{T} + (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref}) : \boldsymbol{D} - \rho\,\partial_p \bar{f}_\psi\,\dot{p} \geqslant 0$$ ($\alpha$ remplacé par $p$)

$$\Phi_{int} = -\rho\,(\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s)\,\dot{T} + \underbrace{(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref}) : \boldsymbol{D} - \rho\,\partial_p \bar{f}_\psi\,\mathscr{H}(\gamma - p - \gamma_{lim})\,\langle \boldsymbol{S}_\gamma : \boldsymbol{D}\rangle}_{\text{indépendant de } \dot{T}} \geqslant 0$$

## Relation de Helmholtz : $\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s = 0$ (raisonnement habituel)

## Comportement mécanique :

- si $\gamma - p - \gamma_{lim} = 0$ **et** $\dot{\gamma} = \boldsymbol{S}_\gamma : \boldsymbol{D} > 0,$ (l'état évolue sur la frontière admissible)
  L'évolution est plastifiante ($\dot{p} > 0$).
  $\forall \boldsymbol{D},\quad \Phi_{int} = (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref} - \rho\,\partial_p \bar{f}_\psi\,\boldsymbol{S}_\gamma) : \boldsymbol{D} \geqslant 0$
  $\Rightarrow\quad \exists \boldsymbol{f}$ tel que $\quad \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref} + \rho\,\partial_p \bar{f}_\psi \boldsymbol{S}_\gamma + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{D}, \cdots)$
- si $\gamma - p - \gamma_{lim} < 0$ **ou** $\dot{\gamma} = \boldsymbol{S}_\gamma : \boldsymbol{D} \leq 0,$ (état intérieur **ou**

# Comportement mécanique (1/2)



## Dissipation intrinsèque :

$\forall \dot{T}\ \forall \boldsymbol{D},$ (pour toute vitesse d'évolution à partir de tout état)

$$\Phi_{int} = -\rho\,(\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s)\,\dot{T} + (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_{ref}^{(p)}) : \boldsymbol{D} - \rho\,\partial_p \bar{f}_\psi\,\dot{p} \geqslant 0$$ ($\alpha$ remplacé par $p$)

$$\Phi_{int} = -\rho\,(\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s)\,\dot{T} + \underbrace{(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_{ref}^{(p)}) : \boldsymbol{D} - \rho\,\partial_p \bar{f}_\psi\,\mathscr{H}(\gamma - p - \gamma_{lim})\,\langle \boldsymbol{S}_\gamma : \boldsymbol{D} \rangle}_{\text{indépendant de } \dot{T}} \geqslant 0$$

## Relation de Helmholtz : $\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s = 0$ (raisonnement habituel)

## Comportement mécanique :

- si $\gamma - p - \gamma_{lim} = 0$ **et** $\dot{\gamma} = \boldsymbol{S}_\gamma : \boldsymbol{D} > 0$, (l'état évolue sur la frontière admissible)
  L'évolution est plastifiante ($\dot{p} > 0$).
  $\forall \boldsymbol{D},\quad \Phi_{int} = (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_{ref}^{(p)} - \rho\,\partial_p \bar{f}_\psi\,\boldsymbol{S}_\gamma) : \boldsymbol{D} \geqslant 0$
  $\Rightarrow\quad \exists \boldsymbol{f}$ tel que $\quad \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_{ref}^{(p)} + \rho\,\partial_p \bar{f}_\psi\,\boldsymbol{S}_\gamma + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{D}, \cdots)$
- si $\gamma - p - \gamma_{lim} < 0$ **ou** $\dot{\gamma} = \boldsymbol{S}_\gamma : \boldsymbol{D} \leq 0$, (état intérieur **ou** évoluant vers l'intérieur)

# Comportement mécanique (1/2)



## Dissipation intrinsèque :

$\forall \dot{T}\ \forall \boldsymbol{D}$, (pour toute vitesse d'évolution à partir de tout état)

$$\Phi_{int} = -\rho\,(\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s)\,\dot{T} + (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref}) : \boldsymbol{D} - \rho\,\partial_p \bar{f}_\psi\,\dot{p} \geqslant 0 \qquad (\alpha \text{ remplacé par } p)$$

$$\Phi_{int} = -\rho\,(\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s)\,\dot{T} + \underbrace{(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref}) : \boldsymbol{D} - \rho\,\partial_p \bar{f}_\psi\,\mathscr{H}(\gamma - p - \gamma_{lim})\,\langle \boldsymbol{S}_\gamma : \boldsymbol{D} \rangle}_{\text{indépendant de } \dot{T}} \geqslant 0$$

## Relation de Helmholtz : $\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s = 0$ (raisonnement habituel)

## Comportement mécanique :

- si $\gamma - p - \gamma_{lim} = 0$ **et** $\dot{\gamma} = \boldsymbol{S}_\gamma : \boldsymbol{D} > 0$, (l'état évolue sur la frontière admissible)
  L'évolution est plastifiante ($\dot{p} > 0$).
  $\forall \boldsymbol{D}$, $\Phi_{int} = (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref} - \rho\,\partial_p \bar{f}_\psi\,\boldsymbol{S}_\gamma) : \boldsymbol{D} \geqslant 0$
  $\Rightarrow$ $\exists \boldsymbol{f}$ tel que $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref} + \rho\,\partial_p \bar{f}_\psi\,\boldsymbol{S}_\gamma + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{D}, \cdots)$
- si $\gamma - p - \gamma_{lim} < 0$ **ou** $\dot{\gamma} = \boldsymbol{S}_\gamma : \boldsymbol{D} \leq 0$, (état intérieur ou évoluant vers l'intérieur)
  L'évolution est non plastifiante ($\dot{p} = 0$).

# Comportement mécanique (1/2)



## Dissipation intrinsèque :

$\forall \dot{T}\ \forall \boldsymbol{D}$, (pour toute vitesse d'évolution à partir de tout état)

$$\Phi_{int} = -\rho\,(\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s)\,\dot{T} + (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref}) : \boldsymbol{D} - \rho\,\partial_p \bar{f}_\psi\,\dot{p} \geqslant 0 \qquad (\alpha \text{ remplacé par } p)$$

$$\Phi_{int} = -\rho\,(\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s)\,\dot{T} + \underbrace{(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref}) : \boldsymbol{D} - \rho\,\partial_p \bar{f}_\psi\,\mathscr{H}(\gamma - p - \gamma_{lim})\,\langle \boldsymbol{S}_\gamma : \boldsymbol{D}\rangle}_{\text{indépendant de } \dot{T}} \geqslant 0$$

## Relation de Helmholtz : $\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s = 0$ (raisonnement habituel)

## Comportement mécanique :

- si $\gamma - p - \gamma_{lim} = 0$ **et** $\dot{\gamma} = \boldsymbol{S}_\gamma : \boldsymbol{D} > 0$, (l'état évolue sur la frontière admissible)
  L'évolution est plastifiante ($\dot{p} > 0$).
  $\forall \boldsymbol{D}$, $\Phi_{int} = (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref} - \rho\,\partial_p \bar{f}_\psi\,\boldsymbol{S}_\gamma) : \boldsymbol{D} \geqslant 0$
  $\Rightarrow$ $\exists \boldsymbol{f}$ tel que $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref} + \rho\,\partial_p \bar{f}_\psi\,\boldsymbol{S}_\gamma + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{D}, \cdots)$
- si $\gamma - p - \gamma_{lim} < 0$ **ou** $\dot{\gamma} = \boldsymbol{S}_\gamma : \boldsymbol{D} \leq 0$, (état intérieur ou évoluant vers l'intérieur)
  L'évolution est non plastifiante ($\dot{p} = 0$).
  $\forall \boldsymbol{D}$, $\Phi_{int} = (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref}) : \boldsymbol{D} \geqslant 0$

# Comportement mécanique (1/2)



## Dissipation intrinsèque :

$\forall \dot{T}\, \forall \boldsymbol{D}$, (pour toute vitesse d'évolution à partir de tout état)

$$\Phi_{int} = -\rho\,(\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s)\,\dot{T} + (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref}) : \boldsymbol{D} - \rho\,\partial_p \bar{f}_\psi\,\dot{p} \geqslant 0$$

($\alpha$ remplacé par $p$)

$$\Phi_{int} = -\rho\,(\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s)\,\dot{T} + \underbrace{(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref}) : \boldsymbol{D} - \rho\,\partial_p \bar{f}_\psi\,\mathscr{H}(\gamma - p - \gamma_{lim})\,\langle \boldsymbol{S}_\gamma : \boldsymbol{D}\rangle}_{\text{indépendant de } \dot{T}} \geqslant 0$$

## Relation de Helmholtz : $\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s = 0$ (raisonnement habituel)

## Comportement mécanique :

- si $\gamma - p - \gamma_{lim} = 0$ **et** $\dot{\gamma} = \boldsymbol{S}_\gamma : \boldsymbol{D} > 0$, (l'état évolue sur la frontière admissible)
  L'évolution est plastifiante ($\dot{p} > 0$).
  $\forall \boldsymbol{D}$, $\Phi_{int} = (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref} - \rho\,\partial_p \bar{f}_\psi\,\boldsymbol{S}_\gamma) : \boldsymbol{D} \geqslant 0$
  $\Rightarrow$ $\exists \boldsymbol{f}$ tel que $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref} + \rho\,\partial_p \bar{f}_\psi\,\boldsymbol{S}_\gamma + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{D}, \cdots)$
- si $\gamma - p - \gamma_{lim} < 0$ **ou** $\dot{\gamma} = \boldsymbol{S}_\gamma : \boldsymbol{D} \leq 0$, (état intérieur ou évoluant vers l'intérieur)
  L'évolution est non plastifiante ($\dot{p} = 0$).
  $\forall \boldsymbol{D}$, $\Phi_{int} = (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref}) : \boldsymbol{D} \geqslant 0$
  $\Rightarrow$ $\exists \boldsymbol{g}$ tel que $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref} + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{D}, \cdots)$

# Comportement mécanique (2/2)

# Comportement mécanique (2/2)



**Deux** lois de comportement :

# Comportement mécanique (2/2)



## Deux lois de comportement :

- En évolution plastifiante :

# Comportement mécanique (2/2)



## Deux lois de comportement :

- En évolution plastifiante : (l'état évolue sur la frontière admissible

# Comportement mécanique (2/2)



## Deux lois de comportement :

- En évolution plastifiante : (l'état évolue sur la frontière admissible et $\dot{\gamma} > 0$)

# Comportement mécanique (2/2)



## Deux lois de comportement :

- En évolution plastifiante : (l'état évolue sur la frontière admissible et $\dot{\gamma} > 0$)

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_{ref}^{(p)} + \rho\, \partial_p \bar{f}_\psi \boldsymbol{S}_\gamma + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{D}, \cdots)$$

# Comportement mécanique (2/2)



## Deux lois de comportement :

- En évolution plastifiante : (l'état évolue sur la frontière admissible et $\dot{\gamma} > 0$)

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_{ref}^{(p)} + \rho\, \partial_p \bar{f}_\psi \boldsymbol{S}_\gamma + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{D}, \cdots) \quad \text{où} \quad \forall \boldsymbol{D},\ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{D}, \cdots) : \boldsymbol{D} \geqslant 0 \quad (\Phi_{int} \geqslant 0)$$

# Comportement mécanique (2/2)



## Deux lois de comportement :

- En évolution plastifiante : (l'état évolue sur la frontière admissible et $\dot{\gamma} > 0$)

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_{ref}^{(p)} + \rho\, \partial_p \bar{f}_\psi \boldsymbol{S}_\gamma + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{D}, \cdots) \quad \text{où} \quad \forall \boldsymbol{D},\ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{D}, \cdots) : \boldsymbol{D} \geqslant 0 \quad (\Phi_{int} \geqslant 0)$$

- En évolution non plastifiante :

# Comportement mécanique (2/2)



## Deux lois de comportement :

- En évolution plastifiante : (l'état évolue sur la frontière admissible et $\dot{\gamma} > 0$)

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_{ref}^{(p)} + \rho\, \partial_p \bar{f}_\psi \boldsymbol{S}_\gamma + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{D}, \cdots) \quad \text{où} \quad \forall \boldsymbol{D},\ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{D}, \cdots) : \boldsymbol{D} \geqslant 0 \quad (\Phi_{int} \geqslant 0)$$

- En évolution non plastifiante : (l'état est intérieur ou $\dot{\gamma} \leq 0$)

# Comportement mécanique (2/2)



## Deux lois de comportement :

- En évolution plastifiante : (l'état évolue sur la frontière admissible et $\dot{\gamma} > 0$)

  $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_{ref}^{(p)} + \rho\, \partial_p \bar{f}_\psi \boldsymbol{S}_\gamma + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{D}, \cdots)$ où $\forall \boldsymbol{D},\ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{D}, \cdots) : \boldsymbol{D} \geqslant 0$ $(\Phi_{int} \geqslant 0)$

- En évolution non plastifiante : (l'état est intérieur ou $\dot{\gamma} \leq 0$)

  $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_{ref}^{(p)} + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{D}, \cdots)$

# Comportement mécanique (2/2)



## Deux lois de comportement :

- En évolution plastifiante : (l'état évolue sur la frontière admissible et $\dot{\gamma} > 0$)

  $$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_{ref}^{(p)} + \rho\, \partial_p \bar{f}_\psi \boldsymbol{S}_\gamma + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{D}, \cdots) \quad \text{où} \ \forall \boldsymbol{D},\ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{D}, \cdots) : \boldsymbol{D} \geqslant 0 \quad (\Phi_{int} \geqslant 0)$$

- En évolution non plastifiante : (l'état est intérieur ou $\dot{\gamma} \leq 0$)

  $$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_{ref}^{(p)} + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{D}, \cdots) \quad \text{où} \ \forall \boldsymbol{D},\ \boldsymbol{g}(\boldsymbol{D}, \cdots) : \boldsymbol{D} \geqslant 0 \quad (\Phi_{int} \geqslant 0)$$

# Comportement mécanique (2/2)



## Deux lois de comportement :

- En évolution plastifiante : (l'état évolue sur la frontière admissible et $\dot{\gamma} > 0$)

  $$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref} + \rho\, \partial_p \bar{f}_\psi \boldsymbol{S}_\gamma + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{D}, \cdots) \quad \text{où} \quad \forall \boldsymbol{D},\ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{D}, \cdots) : \boldsymbol{D} \geqslant 0 \quad (\Phi_{int} \geqslant 0)$$

- En évolution non plastifiante : (l'état est intérieur ou $\dot{\gamma} \leq 0$)

  $$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref} + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{D}, \cdots) \quad \text{où} \quad \forall \boldsymbol{D},\ \boldsymbol{g}(\boldsymbol{D}, \cdots) : \boldsymbol{D} \geqslant 0 \quad (\Phi_{int} \geqslant 0)$$

## Continuité de $\boldsymbol{\sigma}$ sur la frontière des états admissibles :

# Comportement mécanique (2/2)



## Deux lois de comportement :

- En évolution plastifiante : (l'état évolue sur la frontière admissible et $\dot{\gamma} > 0$)

  $$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_{ref}^{(p)} + \rho\, \partial_p \bar{f}_\psi \boldsymbol{S}_\gamma + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{D}, \cdots) \quad \text{où} \quad \forall \boldsymbol{D},\ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{D}, \cdots) : \boldsymbol{D} \geqslant 0 \quad (\Phi_{int} \geqslant 0)$$

- En évolution non plastifiante : (l'état est intérieur ou $\dot{\gamma} \leq 0$)

  $$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_{ref}^{(p)} + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{D}, \cdots) \quad \text{où} \quad \forall \boldsymbol{D},\ \boldsymbol{g}(\boldsymbol{D}, \cdots) : \boldsymbol{D} \geqslant 0 \quad (\Phi_{int} \geqslant 0)$$

## Continuité de $\boldsymbol{\sigma}$ sur la frontière des états admissibles :

$\forall \boldsymbol{D}$ et $\forall$état sur la frontière,

# Comportement mécanique (2/2)



## Deux lois de comportement :

- En évolution plastifiante : (l'état évolue sur la frontière admissible et $\dot{\gamma} > 0$)

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_{ref}^{(p)} + \rho\, \partial_p \bar{f}_\psi \boldsymbol{S}_\gamma + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{D}, \cdots) \quad \text{où } \forall \boldsymbol{D},\ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{D}, \cdots) : \boldsymbol{D} \geqslant 0 \quad (\Phi_{int} \geqslant 0)$$

- En évolution non plastifiante : (l'état est intérieur ou $\dot{\gamma} \leq 0$)

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_{ref}^{(p)} + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{D}, \cdots) \quad \text{où } \forall \boldsymbol{D},\ \boldsymbol{g}(\boldsymbol{D}, \cdots) : \boldsymbol{D} \geqslant 0 \quad (\Phi_{int} \geqslant 0)$$

## Continuité de $\boldsymbol{\sigma}$ sur la frontière des états admissibles :

$\forall \boldsymbol{D}$ et $\forall$état sur la frontière, (c'est-à-dire quand $\gamma - p = \gamma_{lim}$)

# Comportement mécanique (2/2)



## Deux lois de comportement :

- En évolution plastifiante : (l'état évolue sur la frontière admissible et $\dot{\gamma} > 0$)

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_{ref}^{(p)} + \rho\, \partial_p \bar{f}_\psi \boldsymbol{S}_\gamma + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{D}, \cdots) \quad \text{où } \forall \boldsymbol{D},\ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{D}, \cdots) : \boldsymbol{D} \geqslant 0 \quad (\Phi_{int} \geqslant 0)$$

- En évolution non plastifiante : (l'état est intérieur ou $\dot{\gamma} \leq 0$)

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_{ref}^{(p)} + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{D}, \cdots) \quad \text{où } \forall \boldsymbol{D},\ \boldsymbol{g}(\boldsymbol{D}, \cdots) : \boldsymbol{D} \geqslant 0 \quad (\Phi_{int} \geqslant 0)$$

## Continuité de $\boldsymbol{\sigma}$ sur la frontière des états admissibles :

$\forall \boldsymbol{D}$ et $\forall$état sur la frontière, (c'est-à-dire quand $\gamma - p = \gamma_{lim}$)

$$\boldsymbol{\sigma}_{\text{évol. plast.}} = \boldsymbol{\sigma}_{\text{évol. non plast.}}$$

# Comportement mécanique (2/2)



## Deux lois de comportement :

- En évolution plastifiante : (l'état évolue sur la frontière admissible et $\dot{\gamma} > 0$)

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref} + \rho\, \partial_p \bar{f}_\psi \boldsymbol{S}_\gamma + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{D},\cdots) \quad \text{où} \;\; \forall \boldsymbol{D},\; \boldsymbol{f}(\boldsymbol{D},\cdots) : \boldsymbol{D} \geqslant 0 \quad (\Phi_{int} \geqslant 0)$$

- En évolution non plastifiante : (l'état est intérieur ou $\dot{\gamma} \leq 0$)

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref} + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{D},\cdots) \quad \text{où} \;\; \forall \boldsymbol{D},\; \boldsymbol{g}(\boldsymbol{D},\cdots) : \boldsymbol{D} \geqslant 0 \quad (\Phi_{int} \geqslant 0)$$

## Continuité de $\boldsymbol{\sigma}$ sur la frontière des états admissibles :

$\forall \boldsymbol{D}$ et $\forall$état sur la frontière, (c'est-à-dire quand $\gamma - p = \gamma_{lim}$)

$$\boldsymbol{\sigma}_{\text{évol. plast.}} = \boldsymbol{\sigma}_{\text{évol. non plast.}} \quad \Rightarrow$$

# Comportement mécanique (2/2)



## Deux lois de comportement :

- En évolution plastifiante : (l'état évolue sur la frontière admissible et $\dot{\gamma} > 0$)

  $$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_{ref}^{(p)} + \rho\, \partial_p \bar{f}_\psi \boldsymbol{S}_\gamma + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{D}, \cdots) \quad \text{où} \quad \forall \boldsymbol{D},\ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{D}, \cdots) : \boldsymbol{D} \geqslant 0 \quad (\Phi_{int} \geqslant 0)$$

- En évolution non plastifiante : (l'état est intérieur ou $\dot{\gamma} \leq 0$)

  $$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_{ref}^{(p)} + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{D}, \cdots) \quad \text{où} \quad \forall \boldsymbol{D},\ \boldsymbol{g}(\boldsymbol{D}, \cdots) : \boldsymbol{D} \geqslant 0 \quad (\Phi_{int} \geqslant 0)$$

## Continuité de $\boldsymbol{\sigma}$ sur la frontière des états admissibles :

$\forall \boldsymbol{D}$ et $\forall$état sur la frontière, (c'est-à-dire quand $\gamma - p = \gamma_{lim}$)

$$\boldsymbol{\sigma}_{\text{évol. plast.}} = \boldsymbol{\sigma}_{\text{évol. non plast.}} \quad \Rightarrow$$

1. $$\left[\partial_p \bar{f}_\psi\right]_{(\gamma - p = \gamma_{lim})} = 0$$

# Comportement mécanique (2/2)



## Deux lois de comportement :

- En évolution plastifiante : (l'état évolue sur la frontière admissible et $\dot{\gamma} > 0$)

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_{ref}^{(p)} + \rho\, \partial_p \bar{f}_\psi \boldsymbol{S}_\gamma + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{D}, \cdots) \quad \text{où} \quad \forall \boldsymbol{D},\ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{D}, \cdots) : \boldsymbol{D} \geqslant 0 \quad (\Phi_{int} \geqslant 0)$$

- En évolution non plastifiante : (l'état est intérieur ou $\dot{\gamma} \leq 0$)

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_{ref}^{(p)} + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{D}, \cdots) \quad \text{où} \quad \forall \boldsymbol{D},\ \boldsymbol{g}(\boldsymbol{D}, \cdots) : \boldsymbol{D} \geqslant 0 \quad (\Phi_{int} \geqslant 0)$$

## Continuité de $\boldsymbol{\sigma}$ sur la frontière des états admissibles :

$\forall \boldsymbol{D}$ et $\forall$état sur la frontière, (c'est-à-dire quand $\gamma - p = \gamma_{lim}$)

$$\boldsymbol{\sigma}_{\text{évol. plast.}} = \boldsymbol{\sigma}_{\text{évol. non plast.}} \quad \Rightarrow$$

1. $\left[\partial_p \bar{f}_\psi\right]_{(\gamma - p = \gamma_{lim})} = 0$ (condition sur la fonction d'état $\partial_p \bar{f}_\psi$)

# Comportement mécanique (2/2)



## Deux lois de comportement :

- En évolution plastifiante : (l'état évolue sur la frontière admissible et $\dot{\gamma} > 0$)
  $$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_{ref}^{(p)} + \rho\, \partial_p \bar{f}_\psi \boldsymbol{S}_\gamma + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{D}, \cdots) \quad \text{où} \quad \forall \boldsymbol{D},\ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{D}, \cdots) : \boldsymbol{D} \geqslant 0 \quad (\Phi_{int} \geqslant 0)$$
- En évolution non plastifiante : (l'état est intérieur ou $\dot{\gamma} \leq 0$)
  $$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_{ref}^{(p)} + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{D}, \cdots) \quad \text{où} \quad \forall \boldsymbol{D},\ \boldsymbol{g}(\boldsymbol{D}, \cdots) : \boldsymbol{D} \geqslant 0 \quad (\Phi_{int} \geqslant 0)$$

## Continuité de $\boldsymbol{\sigma}$ sur la frontière des états admissibles :

$\forall \boldsymbol{D}$ et $\forall$état sur la frontière, (c'est-à-dire quand $\gamma - p = \gamma_{lim}$)

$$\boldsymbol{\sigma}_{\text{évol. plast.}} = \boldsymbol{\sigma}_{\text{évol. non plast.}} \quad \Rightarrow$$

1. $$\left[\partial_p \bar{f}_\psi\right]_{(\gamma - p = \gamma_{lim})} = 0 \quad \text{(condition sur la fonction d'état } \partial_p \bar{f}_\psi)$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\partial_p \bar{f}_\psi\right)(T, I_1, \cdots, I_m,$$

# Comportement mécanique (2/2)



## Deux lois de comportement :

- En évolution plastifiante : (l'état évolue sur la frontière admissible et $\dot{\gamma} > 0$)
  $$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref} + \rho\, \partial_p \bar{f}_\psi \boldsymbol{S}_\gamma + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{D}, \cdots) \quad \text{où} \;\; \forall \boldsymbol{D},\; \boldsymbol{f}(\boldsymbol{D}, \cdots) : \boldsymbol{D} \geqslant 0 \quad (\Phi_{int} \geqslant 0)$$
- En évolution non plastifiante : (l'état est intérieur ou $\dot{\gamma} \leq 0$)
  $$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref} + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{D}, \cdots) \quad \text{où} \;\; \forall \boldsymbol{D},\; \boldsymbol{g}(\boldsymbol{D}, \cdots) : \boldsymbol{D} \geqslant 0 \quad (\Phi_{int} \geqslant 0)$$

## Continuité de $\boldsymbol{\sigma}$ sur la frontière des états admissibles :

$\forall \boldsymbol{D}$ et $\forall$état sur la frontière, (c'est-à-dire quand $\gamma - p = \gamma_{lim}$)

$$\boldsymbol{\sigma}_{\text{évol. plast.}} = \boldsymbol{\sigma}_{\text{évol. non plast.}} \quad \Rightarrow$$

1. $\left[\partial_p \bar{f}_\psi\right]_{(\gamma - p = \gamma_{lim})} = 0$ (condition sur la fonction d'état $\partial_p \bar{f}_\psi$)

$$\Leftrightarrow \quad \left(\partial_p \bar{f}_\psi\right)(T, I_1, \cdots, I_m, \underbrace{f_\gamma(I_1, \cdots, I_m) - \gamma_{lim}}_{p = \gamma - \gamma_{lim}}) = 0$$

# Comportement mécanique (2/2)



## Deux lois de comportement :

- En évolution plastifiante : (l'état évolue sur la frontière admissible et $\dot{\gamma} > 0$)

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_{ref}^{(p)} + \rho\, \partial_p \bar{f}_\psi \boldsymbol{S}_\gamma + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{D}, \cdots) \quad \text{où } \forall \boldsymbol{D},\ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{D}, \cdots) : \boldsymbol{D} \geqslant 0 \quad (\Phi_{int} \geqslant 0)$$

- En évolution non plastifiante : (l'état est intérieur ou $\dot{\gamma} \leq 0$)

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_{ref}^{(p)} + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{D}, \cdots) \quad \text{où } \forall \boldsymbol{D},\ \boldsymbol{g}(\boldsymbol{D}, \cdots) : \boldsymbol{D} \geqslant 0 \quad (\Phi_{int} \geqslant 0)$$

## Continuité de $\boldsymbol{\sigma}$ sur la frontière des états admissibles :

$\forall \boldsymbol{D}$ et $\forall$état sur la frontière, (c'est-à-dire quand $\gamma - p = \gamma_{lim}$)

$$\boldsymbol{\sigma}_{\text{évol. plast.}} = \boldsymbol{\sigma}_{\text{évol. non plast.}} \quad \Rightarrow$$

1. $\left[\partial_p \bar{f}_\psi\right]_{(\gamma - p = \gamma_{lim})} = 0$ (condition sur la fonction d'état $\partial_p \bar{f}_\psi$)

$$\Leftrightarrow \quad \left(\partial_p \bar{f}_\psi\right)(T, I_1, \cdots, I_m, \underbrace{f_\gamma(I_1, \cdots, I_m) - \gamma_{lim}}_{p = \gamma - \gamma_{lim}}) = 0 \qquad \text{(éq. diff. sur } \bar{f}_\psi\text{)}$$

# Comportement mécanique (2/2)



## Deux lois de comportement :

- En évolution plastifiante : (l'état évolue sur la frontière admissible et $\dot{\gamma} > 0$)

  $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_{ref}^{(p)} + \rho\, \partial_p \bar{f}_\psi \boldsymbol{S}_\gamma + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{D}, \cdots)$ où $\forall \boldsymbol{D},\ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{D}, \cdots) : \boldsymbol{D} \geqslant 0$ $(\Phi_{int} \geqslant 0)$

- En évolution non plastifiante : (l'état est intérieur ou $\dot{\gamma} \leq 0$)

  $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_{ref}^{(p)} + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{D}, \cdots)$ où $\forall \boldsymbol{D},\ \boldsymbol{g}(\boldsymbol{D}, \cdots) : \boldsymbol{D} \geqslant 0$ $(\Phi_{int} \geqslant 0)$

## Continuité de $\boldsymbol{\sigma}$ sur la frontière des états admissibles :

$\forall \boldsymbol{D}$ et $\forall$état sur la frontière, (c'est-à-dire quand $\gamma - p = \gamma_{lim}$)

$\boldsymbol{\sigma}_{\text{évol. plast.}} = \boldsymbol{\sigma}_{\text{évol. non plast.}} \quad \Rightarrow$

1. $\left[\partial_p \bar{f}_\psi\right]_{(\gamma - p = \gamma_{lim})} = 0$ (condition sur la fonction d'état $\partial_p \bar{f}_\psi$)

$\Leftrightarrow \quad \left(\partial_p \bar{f}_\psi\right)(T, I_1, \cdots, I_m, \underbrace{f_\gamma(I_1, \cdots, I_m) - \gamma_{lim}}_{p = \gamma - \gamma_{lim}}) = 0$ (éq. diff. sur $\bar{f}_\psi$)

Contrainte en évolution plastifiante :

# Comportement mécanique (2/2)



## Deux lois de comportement :

- En évolution plastifiante : (l'état évolue sur la frontière admissible et $\dot{\gamma} > 0$)

  $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_{ref}^{(p)} + \rho\, \partial_p \bar{f}_\psi \boldsymbol{S}_\gamma + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{D}, \cdots)$ où $\forall \boldsymbol{D},\ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{D}, \cdots) : \boldsymbol{D} \geqslant 0$ $(\Phi_{int} \geqslant 0)$

- En évolution non plastifiante : (l'état est intérieur ou $\dot{\gamma} \leq 0$)

  $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_{ref}^{(p)} + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{D}, \cdots)$ où $\forall \boldsymbol{D},\ \boldsymbol{g}(\boldsymbol{D}, \cdots) : \boldsymbol{D} \geqslant 0$ $(\Phi_{int} \geqslant 0)$

## Continuité de $\boldsymbol{\sigma}$ sur la frontière des états admissibles :

$\forall \boldsymbol{D}$ et $\forall$état sur la frontière, (c'est-à-dire quand $\gamma - p = \gamma_{lim}$)

$$\boldsymbol{\sigma}_{\text{évol. plast.}} = \boldsymbol{\sigma}_{\text{évol. non plast.}} \quad \Rightarrow$$

1. $\left[\partial_p \bar{f}_\psi\right]_{(\gamma - p = \gamma_{lim})} = 0$ (condition sur la fonction d'état $\partial_p \bar{f}_\psi$)

$$\Leftrightarrow \quad (\partial_p \bar{f}_\psi)(T, I_1, \cdots, I_m, \underbrace{f_\gamma(I_1, \cdots, I_m) - \gamma_{lim}}_{p = \gamma - \gamma_{lim}}) = 0$$ (éq. diff. sur $\bar{f}_\psi$)

Contrainte en évolution plastifiante : $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_{ref}^{(p)} + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{D}, \cdots)$

# Comportement mécanique (2/2)



## Deux lois de comportement :

- En évolution plastifiante : (l'état évolue sur la frontière admissible et $\dot{\gamma} > 0$)

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_{ref}^{(p)} + \rho\, \partial_p \bar{f}_\psi \boldsymbol{S}_\gamma + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{D}, \cdots) \quad \text{où } \forall \boldsymbol{D},\ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{D}, \cdots) : \boldsymbol{D} \geqslant 0 \quad (\Phi_{int} \geqslant 0)$$

- En évolution non plastifiante : (l'état est intérieur ou $\dot{\gamma} \leq 0$)

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_{ref}^{(p)} + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{D}, \cdots) \quad \text{où } \forall \boldsymbol{D},\ \boldsymbol{g}(\boldsymbol{D}, \cdots) : \boldsymbol{D} \geqslant 0 \quad (\Phi_{int} \geqslant 0)$$

## Continuité de $\boldsymbol{\sigma}$ sur la frontière des états admissibles :

$\forall \boldsymbol{D}$ et $\forall$état sur la frontière, (c'est-à-dire quand $\gamma - p = \gamma_{lim}$)

$$\boldsymbol{\sigma}_{\text{évol. plast.}} = \boldsymbol{\sigma}_{\text{évol. non plast.}} \quad \Rightarrow$$

1. $\left[\partial_p \bar{f}_\psi\right]_{(\gamma - p = \gamma_{lim})} = 0$ (condition sur la fonction d'état $\partial_p \bar{f}_\psi$)

$$\Leftrightarrow \quad \left(\partial_p \bar{f}_\psi\right)(T, I_1, \cdots, I_m, \underbrace{f_\gamma(I_1, \cdots, I_m) - \gamma_{lim}}_{p = \gamma - \gamma_{lim}}) = 0 \quad (\text{éq. diff. sur } \bar{f}_\psi)$$

Contrainte en évolution plastifiante : $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_{ref}^{(p)} + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{D}, \cdots)$

2. $\left[\boldsymbol{g}(\boldsymbol{D}, \cdots)\right]_{(\gamma - p = \gamma_{lim})} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{D}, \cdots)$

# Comportement mécanique (2/2)



## Deux lois de comportement :

- En évolution plastifiante : (l'état évolue sur la frontière admissible et $\dot{\gamma} > 0$)
  $$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref} + \rho\, \partial_p \bar{f}_\psi \boldsymbol{S}_\gamma + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{D}, \cdots) \quad \text{où} \ \forall \boldsymbol{D},\ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{D}, \cdots) : \boldsymbol{D} \geqslant 0 \quad (\Phi_{int} \geqslant 0)$$
- En évolution non plastifiante : (l'état est intérieur ou $\dot{\gamma} \leq 0$)
  $$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref} + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{D}, \cdots) \quad \text{où} \ \forall \boldsymbol{D},\ \boldsymbol{g}(\boldsymbol{D}, \cdots) : \boldsymbol{D} \geqslant 0 \quad (\Phi_{int} \geqslant 0)$$

## Continuité de $\boldsymbol{\sigma}$ sur la frontière des états admissibles :

$\forall \boldsymbol{D}$ et $\forall$état sur la frontière, (c'est-à-dire quand $\gamma - p = \gamma_{lim}$)

$$\boldsymbol{\sigma}_{\text{évol. plast.}} = \boldsymbol{\sigma}_{\text{évol. non plast.}} \quad \Rightarrow$$

1. $\left[\partial_p \bar{f}_\psi\right]_{(\gamma - p = \gamma_{lim})} = 0$ (condition sur la fonction d'état $\partial_p \bar{f}_\psi$)
   $$\Leftrightarrow \quad \left(\partial_p \bar{f}_\psi\right)(T, I_1, \cdots, I_m, \underbrace{f_\gamma(I_1, \cdots, I_m) - \gamma_{lim}}_{p = \gamma - \gamma_{lim}}) = 0 \quad \text{(éq. diff. sur } \bar{f}_\psi)$$
   Contrainte en évolution plastifiante : $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref} + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{D}, \cdots)$
2. $\left[\boldsymbol{g}(\boldsymbol{D}, \cdots)\right]_{(\gamma - p = \gamma_{lim})} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{D}, \cdots)$ (cond. sur les fonctions dissipatives)

# Récapitulation

# Récapitulation

- Variables d'état :

# Récapitulation

- Variables d'état : $\{T,$

# Récapitulation

- Variables d'état : $\{T, \underbrace{I_1, \cdots, I_m}_{(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{N}_t^{\bullet})},$

# Récapitulation

- Variables d'état : $\{T, \underbrace{I_1, \cdots, I_m}_{(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{N}_t^{\bullet})}, p\}$

# Récapitulation

- Variables d'état : $\{T, \underbrace{I_1, \cdots, I_m}_{(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{N}_t^{\bullet})}, p\}$ où $p(t) = \sup\limits_{\tau \in [t_0\,;t]} \langle \gamma(\tau) - \gamma_{lim} \rangle$

# Récapitulation



- Variables d'état : $\{T, \underbrace{I_1, \cdots, I_m}_{(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{N}_t^\bullet)}, p\}$ où $p(t) = \sup_{\tau \in [t_0\,;t]} \langle \gamma(\tau) - \gamma_{lim} \rangle$
- Espace des états admissibles :

# Récapitulation



- Variables d'état : $\{T, \underbrace{I_1, \cdots, I_m}_{(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{N}_t^{\bullet})}, p\}$ où $p(t) = \sup\limits_{\tau \in [t_0\,; t]} \langle \gamma(\tau) - \gamma_{lim} \rangle$
- Espace des états admissibles : $\underbrace{f_\gamma(I_1, \cdots, I_m)}_{\gamma} - p \leq \gamma_{lim}$

# Récapitulation

- Variables d'état : $\{T, \underbrace{I_1, \cdots, I_m}_{(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{N}_t^\bullet)}, p\}$ où $p(t) = \sup\limits_{\tau \in [t_0\,;t]} \langle \gamma(\tau) - \gamma_{lim} \rangle$
- Espace des états admissibles : $\underbrace{f_\gamma(I_1, \cdots, I_m)}_{\gamma} - p \leq \gamma_{lim}$
- Loi d'évolution :

# Récapitulation

- Variables d'état : $\{T, \underbrace{I_1, \cdots, I_m}_{(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{N}_t^\bullet)}, p\}$ où $p(t) = \sup_{\tau \in [t_0 ; t]} \langle \gamma(\tau) - \gamma_{lim} \rangle$
- Espace des états admissibles : $\underbrace{f_\gamma(I_1, \cdots, I_m)}_{\gamma} - p \leq \gamma_{lim}$
- Loi d'évolution : $\dot{p} = \mathscr{H}(\gamma - p - \gamma_{lim}) \langle \dot{\gamma} \rangle$

# Récapitulation

- Variables d'état : $\{T, \underbrace{I_1, \cdots, I_m}_{(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{N}_t^\bullet)}, p\}$ où $p(t) = \sup\limits_{\tau \in [t_0\,;t]} \langle \gamma(\tau) - \gamma_{lim} \rangle$
- Espace des états admissibles : $\underbrace{f_\gamma(I_1, \cdots, I_m)}_{\gamma} - p \leq \gamma_{lim}$
- Loi d'évolution : $\dot{p} = \mathscr{H}(\gamma - p - \gamma_{lim}) \langle \dot{\gamma} \rangle$ où $\dot{\gamma} = \boldsymbol{S}_\gamma : \boldsymbol{D}$

# Récapitulation

- Variables d'état : $\{T, \underbrace{I_1, \cdots, I_m}_{(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{N}_i^{\bullet})}, p\}$ où $p(t) = \sup\limits_{\tau \in [t_0\,;t]} \langle \gamma(\tau) - \gamma_{lim} \rangle$
- Espace des états admissibles : $\underbrace{f_\gamma(I_1, \cdots, I_m)}_{\gamma} - p \leq \gamma_{lim}$
- Loi d'évolution : $\dot{p} = \mathscr{H}(\gamma - p - \gamma_{lim}) \langle \dot{\gamma} \rangle$ où $\dot{\gamma} = \boldsymbol{S}_\gamma : \boldsymbol{D}$
- Loi de comportement mécanique :

$$\Phi_{int} \geqslant 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_{ref}^{(p)} + \boldsymbol{\sigma}_d(\boldsymbol{D}, \mathscr{H}(\gamma - p - \gamma_{lim}), \cdots)$$

# Récapitulation



- Variables d'état : $\{T, \underbrace{I_1, \cdots, I_m}_{(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{N}_i^\bullet)}, p\}$ où $p(t) = \sup\limits_{\tau \in [t_0\,;t]} \langle \gamma(\tau) - \gamma_{lim} \rangle$
- Espace des états admissibles : $\underbrace{f_\gamma(I_1, \cdots, I_m)}_{\gamma} - p \leq \gamma_{lim}$
- Loi d'évolution : $\dot{p} = \mathscr{H}(\gamma - p - \gamma_{lim}) \langle \dot{\gamma} \rangle$ où $\dot{\gamma} = \boldsymbol{S}_\gamma : \boldsymbol{D}$
- Loi de comportement mécanique :

$$\Phi_{int} \geqslant 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_{ref}^{(p)} + \boldsymbol{\sigma}_d(\boldsymbol{D}, \mathscr{H}(\gamma - p - \gamma_{lim}), \cdots)$$

où $\boldsymbol{\sigma}_{ref}^{(p)} = \rho \sum_{j=1}^{m} \partial_{I_j} \bar{f}_\psi \boldsymbol{S}_j$

# Récapitulation



- Variables d'état : $\{T,\underbrace{I_1,\cdots,I_m}_{(\boldsymbol{X},\boldsymbol{N}_i^\bullet)},p\}$ où $p(t) = \sup\limits_{\tau\in[t_0\,;t]} \langle\gamma(\tau)-\gamma_{lim}\rangle$
- Espace des états admissibles : $\underbrace{f_\gamma(I_1,\cdots,I_m)}_{\gamma} - p \leq \gamma_{lim}$
- Loi d'évolution : $\dot{p} = \mathscr{H}(\gamma-p-\gamma_{lim})\,\langle\dot{\gamma}\rangle$ où $\dot{\gamma} = \boldsymbol{S}_\gamma : \boldsymbol{D}$
- Loi de comportement mécanique :

$$\Phi_{int} \geqslant 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_{ref}^{(p)} + \boldsymbol{\sigma}_d(\boldsymbol{D},\mathscr{H}(\gamma-p-\gamma_{lim}),\cdots)$$

où $\boldsymbol{\sigma}_{ref}^{(p)} = \rho \sum_{j=1}^{m} \partial_{I_j}\bar{f}_\psi\,\boldsymbol{S}_j$ (« contrainte élastique », mais fonction de $p$ à cause de $f_\psi$)

# Récapitulation



- Variables d'état : $\{T, \underbrace{I_1, \cdots, I_m}_{(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{N}_i^\bullet)}, p\}$ où $p(t) = \sup_{\tau \in [t_0; t]} \langle \gamma(\tau) - \gamma_{lim} \rangle$
- Espace des états admissibles : $\underbrace{f_\gamma(I_1, \cdots, I_m)}_{\gamma} - p \leq \gamma_{lim}$
- Loi d'évolution : $\dot{p} = \mathscr{H}(\gamma - p - \gamma_{lim}) \langle \dot{\gamma} \rangle$ où $\dot{\gamma} = \boldsymbol{S}_\gamma : \boldsymbol{D}$
- Loi de comportement mécanique :

$$\Phi_{int} \geqslant 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_{ref}^{(p)} + \boldsymbol{\sigma}_d(\boldsymbol{D}, \mathscr{H}(\gamma - p - \gamma_{lim}), \cdots)$$

où $\boldsymbol{\sigma}_{ref}^{(p)} = \rho \sum_{j=1}^{m} \partial_{I_j} \bar{f}_\psi \boldsymbol{S}_j$ (« contrainte élastique », mais fonction de $p$ à cause de $f_\psi$)

(la contrainte dissipative $\boldsymbol{\sigma}_d$ peut être choisie nulle

# Récapitulation



- Variables d'état : $\{T, \underbrace{I_1, \cdots, I_m}_{(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{N}_i^\bullet)}, p\}$ où $p(t) = \sup\limits_{\tau \in [t_0\,;t]} \langle \gamma(\tau) - \gamma_{lim} \rangle$
- Espace des états admissibles : $\underbrace{f_\gamma(I_1, \cdots, I_m)}_{\gamma} - p \leq \gamma_{lim}$
- Loi d'évolution : $\dot{p} = \mathscr{H}(\gamma - p - \gamma_{lim}) \langle \dot{\gamma} \rangle$ où $\dot{\gamma} = \boldsymbol{S}_\gamma : \boldsymbol{D}$
- Loi de comportement mécanique :

$$\Phi_{int} \geqslant 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_{ref}^{(p)} + \boldsymbol{\sigma}_d(\boldsymbol{D}, \mathscr{H}(\gamma - p - \gamma_{lim}), \cdots)$$

où $\boldsymbol{\sigma}_{ref}^{(p)} = \rho \sum_{j=1}^{m} \partial_{I_j} \bar{f}_\psi \boldsymbol{S}_j$ (« contrainte élastique », mais fonction de $p$ à cause de $f_\psi$)

(la contrainte dissipative $\boldsymbol{\sigma}_d$ peut être choisie nulle : plasticité sans dissipation intrinsèque)

# Récapitulation



- Variables d'état : $\{T, \underbrace{I_1, \cdots, I_m}_{(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{N}_i^\bullet)}, p\}$ où $p(t) = \sup\limits_{\tau \in [t_0\,;t]} \langle \gamma(\tau) - \gamma_{lim} \rangle$
- Espace des états admissibles : $\underbrace{f_\gamma(I_1, \cdots, I_m)}_{\gamma} - p \leq \gamma_{lim}$
- Loi d'évolution : $\dot{p} = \mathscr{H}(\gamma - p - \gamma_{lim})\,\langle \dot{\gamma} \rangle$ où $\dot{\gamma} = \boldsymbol{S}_\gamma : \boldsymbol{D}$
- Loi de comportement mécanique :

$$\Phi_{int} \geqslant 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_{ref}^{(p)} + \boldsymbol{\sigma}_d(\boldsymbol{D}, \mathscr{H}(\gamma - p - \gamma_{lim}), \cdots)$$

où $\boldsymbol{\sigma}_{ref}^{(p)} = \rho \sum_{j=1}^{m} \partial_{I_j} \bar{f}_\psi \, \boldsymbol{S}_j$ (« contrainte élastique », mais fonction de $p$ à cause de $f_\psi$)

(la contrainte dissipative $\boldsymbol{\sigma}_d$ peut être choisie nulle : plasticité sans dissipation intrinsèque)

- Loi de comportement thermique :

# Récapitulation



- Variables d'état : $\{T, \underbrace{I_1, \cdots, I_m}_{(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{N}_i^{\bullet})}, p\}$ où $p(t) = \sup_{\tau \in [t_0\,;t]} \langle \gamma(\tau) - \gamma_{lim} \rangle$
- Espace des états admissibles : $\underbrace{f_\gamma(I_1, \cdots, I_m)}_{\gamma} - p \leq \gamma_{lim}$
- Loi d'évolution : $\dot{p} = \mathscr{H}(\gamma - p - \gamma_{lim})\,\langle \dot{\gamma} \rangle$ où $\dot{\gamma} = \boldsymbol{S}_\gamma : \boldsymbol{D}$
- Loi de comportement mécanique :

$$\Phi_{int} \geqslant 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_{ref}^{(p)} + \boldsymbol{\sigma}_d(\boldsymbol{D}, \mathscr{H}(\gamma - p - \gamma_{lim}), \cdots)$$

où $\boldsymbol{\sigma}_{ref}^{(p)} = \rho \sum_{j=1}^{m} \partial_{I_j} \bar{f}_\psi \boldsymbol{S}_j$ (« contrainte élastique », mais fonction de $p$ à cause de $f_\psi$)

(la contrainte dissipative $\boldsymbol{\sigma}_d$ peut être choisie nulle : plasticité sans dissipation intrinsèque)

- Loi de comportement thermique :

$$\Phi_{th} \geqslant 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{q} = \boldsymbol{f_q}(\mathbf{grad}_E\, T, \cdots)$$

# Récapitulation



- Variables d'état : $\{T, \underbrace{I_1, \cdots, I_m}_{(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{N}_i^\bullet)}, p\}$ où $p(t) = \sup_{\tau \in [t_0;t]} \langle \gamma(\tau) - \gamma_{lim} \rangle$
- Espace des états admissibles : $\underbrace{f_\gamma(I_1, \cdots, I_m)}_{\gamma} - p \leq \gamma_{lim}$
- Loi d'évolution : $\dot{p} = \mathscr{H}(\gamma - p - \gamma_{lim}) \langle \dot{\gamma} \rangle$ où $\dot{\gamma} = \boldsymbol{S}_\gamma : \boldsymbol{D}$
- Loi de comportement mécanique :

$$\Phi_{int} \geqslant 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_{ref}^{(p)} + \boldsymbol{\sigma}_d(\boldsymbol{D}, \mathscr{H}(\gamma - p - \gamma_{lim}), \cdots)$$

où $\boldsymbol{\sigma}_{ref}^{(p)} = \rho \sum_{j=1}^{m} \partial_{I_j} \bar{f}_\psi \boldsymbol{S}_j$ (« contrainte élastique », mais fonction de $p$ à cause de $f_\psi$)

(la contrainte dissipative $\boldsymbol{\sigma}_d$ peut être choisie nulle : plasticité sans dissipation intrinsèque)

- Loi de comportement thermique :

$$\Phi_{th} \geqslant 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{q} = \boldsymbol{f}_{\boldsymbol{q}}(\mathbf{grad}_E T, \cdots)$$

Pour terminer le modèle, il reste à construire une fonction d'état $\bar{f}_\psi(T, I_1, \cdots, I_m, p)$ physiquement motivée,

# Récapitulation



- Variables d'état : $\{T,\underbrace{I_1,\cdots,I_m}_{(\boldsymbol{X},\boldsymbol{N}_i^{\bullet})},p\}$ où $p(t)=\sup\limits_{\tau\in[t_0\,;t]}\langle\gamma(\tau)-\gamma_{lim}\rangle$
- Espace des états admissibles : $\underbrace{f_\gamma(I_1,\cdots,I_m)}_{\gamma}-p\leq\gamma_{lim}$
- Loi d'évolution : $\dot{p}=\mathscr{H}(\gamma-p-\gamma_{lim})\,\langle\dot{\gamma}\rangle$ où $\dot{\gamma}=\boldsymbol{S}_\gamma:\boldsymbol{D}$
- Loi de comportement mécanique :

$$\Phi_{int}\geqslant 0 \quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{\sigma}_{ref}^{(p)}+\boldsymbol{\sigma}_d(\boldsymbol{D},\mathscr{H}(\gamma-p-\gamma_{lim}),\cdots)$$

où $\boldsymbol{\sigma}_{ref}^{(p)}=\rho\sum\limits_{j=1}^{m}\partial_{I_j}\bar{f}_\psi\,\boldsymbol{S}_j$ (« contrainte élastique », mais fonction de $p$ à cause de $f_\psi$)

(la contrainte dissipative $\boldsymbol{\sigma}_d$ peut être choisie nulle : plasticité sans dissipation intrinsèque)

- Loi de comportement thermique :

$$\Phi_{th}\geqslant 0 \quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{q}=\boldsymbol{f_q}(\mathbf{grad}_E\,T,\cdots)$$

Pour terminer le modèle, il reste à construire une fonction d'état $\bar{f}_\psi(T,I_1,\cdots,I_m,p)$ physiquement motivée, avec $\left[\partial_p\bar{f}_\psi\right]_{(\gamma-p=\gamma_{lim})}=0$.

# Construction d'une énergie libre (1/4)

# Construction d'une énergie libre (1/4)

**Variables d'état :** $\{T, K_v, \gamma,$

# Construction d'une énergie libre (1/4)

## Variables d'état : $\{T, K_v, \gamma, p\}$

# Construction d'une énergie libre (1/4)

**Variables d'état :** $\{T, K_v, \gamma, p\}$ (plasticité d'un solide déformable isotrope)

# Construction d'une énergie libre (1/4)



## Variables d'état : $\{T, K_v, \gamma, p\}$ (plasticité d'un solide déformable isotrope)

## Loi d'évolution :

# Construction d'une énergie libre (1/4)



**Variables d'état :** $\{T, K_v, \gamma, p\}$ (plasticité d'un solide déformable isotrope)

**Loi d'évolution :** $\dot{p} = \mathscr{H}(\gamma - p - \gamma_{lim}) \langle \dot{\gamma} \rangle$ (états admissibles : $\gamma - p - \gamma_{lim} \leq 0$)

# Construction d'une énergie libre (1/4)

**Variables d'état :** $\{T, K_v, \gamma, p\}$ (plasticité d'un solide déformable isotrope)

**Loi d'évolution :** $\dot{p} = \mathscr{H}(\gamma - p - \gamma_{lim})\,\langle\dot{\gamma}\rangle$ (états admissibles : $\gamma - p - \gamma_{lim} \leq 0$)

**Un chemin pour aller à un état admissible quelconque :**

# Construction d'une énergie libre (1/4)



**Variables d'état :** $\{T, K_v, \gamma, p\}$ (plasticité d'un solide déformable isotrope)

**Loi d'évolution :** $\dot{p} = \mathscr{H}(\gamma - p - \gamma_{lim}) \langle \dot{\gamma} \rangle$ (états admissibles : $\gamma - p - \gamma_{lim} \leq 0$)

**Un chemin pour aller à un état admissible quelconque :**

$$\underbrace{E_0 = (T_0, 1, 0, 0)}_{\text{état de réf.}}$$

# Construction d'une énergie libre (1/4)



**Variables d'état :** $\{T, K_v, \gamma, p\}$ (plasticité d'un solide déformable isotrope)

**Loi d'évolution :** $\dot{p} = \mathscr{H}(\gamma - p - \gamma_{lim})\,\langle\dot{\gamma}\rangle$ (états admissibles : $\gamma - p - \gamma_{lim} \leq 0$)

**Un chemin pour aller à un état admissible quelconque :**

$$\underbrace{E_0 = (T_0, 1, 0, 0)}_{\text{état de réf.}} \xrightarrow{\mathscr{C}^{(1)}} E_1 = (T, 1, 0, 0)$$

# Construction d'une énergie libre (1/4)



**Variables d'état :** $\{T, K_v, \gamma, p\}$ (plasticité d'un solide déformable isotrope)

**Loi d'évolution :** $\dot{p} = \mathscr{H}(\gamma - p - \gamma_{lim})\,\langle\dot{\gamma}\rangle$ (états admissibles : $\gamma - p - \gamma_{lim} \leq 0$)

**Un chemin pour aller à un état admissible quelconque :**

$$\underbrace{E_0 = (T_0, 1, 0, 0)}_{\text{état de réf.}} \xrightarrow{\mathscr{C}^{(1)}} E_1 = (T, 1, 0, 0) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(2)}} E_2 = (T, K_v, 0, 0)$$

# Construction d'une énergie libre (1/4)



**Variables d'état :** $\{T, K_v, \gamma, p\}$ (plasticité d'un solide déformable isotrope)

**Loi d'évolution :** $\dot{p} = \mathscr{H}(\gamma - p - \gamma_{lim}) \langle \dot{\gamma} \rangle$ (états admissibles : $\gamma - p - \gamma_{lim} \leq 0$)

**Un chemin pour aller à un état admissible quelconque :**

$$\underbrace{E_0 = (T_0, 1, 0, 0)}_{\text{état de réf.}} \xrightarrow{\mathscr{C}^{(1)}} E_1 = (T, 1, 0, 0) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(2)}} E_2 = (T, K_v, 0, 0) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(3)}}$$

$$E_3 = (T, K_v, \gamma_{lim}, 0)$$

# Construction d'une énergie libre (1/4)



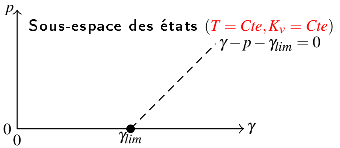
## Variables d'état : $\{T, K_v, \gamma, p\}$ (plasticité d'un solide déformable isotrope)

## Loi d'évolution : $\dot{p} = \mathscr{H}(\gamma - p - \gamma_{lim})\langle\dot{\gamma}\rangle$ (états admissibles : $\gamma - p - \gamma_{lim} \leq 0$)

## Un chemin pour aller à un état admissible quelconque :

$$\underbrace{E_0 = (T_0, 1, 0, 0)}_{\text{état de réf.}} \xrightarrow{\mathscr{C}^{(1)}} E_1 = (T, 1, 0, 0) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(2)}} E_2 = (T, K_v, 0, 0) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(3)}}$$

$$E_3 = (T, K_v, \gamma_{lim}, 0)$$



# Construction d'une énergie libre (1/4)



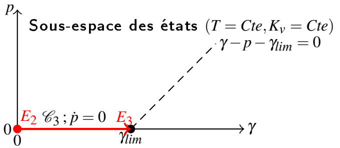
## Variables d'état : $\{T, K_v, \gamma, p\}$ (plasticité d'un solide déformable isotrope)

## Loi d'évolution : $\dot{p} = \mathscr{H}(\gamma - p - \gamma_{lim})\,\langle\dot{\gamma}\rangle$ (états admissibles : $\gamma - p - \gamma_{lim} \leq 0$)

## Un chemin pour aller à un état admissible quelconque :

$$\underbrace{E_0 = (T_0, 1, 0, 0)}_{\text{état de réf.}} \xrightarrow{\mathscr{C}^{(1)}} E_1 = (T, 1, 0, 0) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(2)}} E_2 = (T, K_v, 0, 0) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(3)}}$$

$$E_3 = (T, K_v, \gamma_{lim}, 0)$$



# Construction d'une énergie libre (1/4)



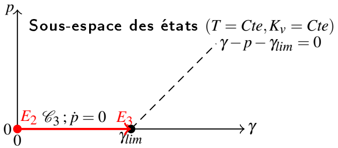
**Variables d'état :** $\{T, K_v, \gamma, p\}$ (plasticité d'un solide déformable isotrope)

**Loi d'évolution :** $\dot{p} = \mathscr{H}(\gamma - p - \gamma_{lim})\,\langle\dot{\gamma}\rangle$ (états admissibles : $\gamma - p - \gamma_{lim} \leq 0$)

**Un chemin pour aller à un état admissible quelconque :**

$$\underbrace{E_0 = (T_0, 1, 0, 0)}_{\text{état de réf.}} \xrightarrow{\mathscr{C}^{(1)}} E_1 = (T, 1, 0, 0) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(2)}} E_2 = (T, K_v, 0, 0) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(3)}}$$

$$E_3 = (T, K_v, \gamma_{lim}, 0) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(4)}} E_4 = (T, K_v, \gamma_{lim} + p, p)$$



# Construction d'une énergie libre (1/4)



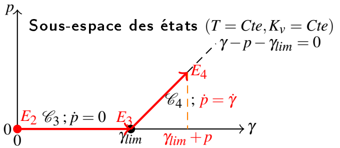
**Variables d'état :** $\{T, K_v, \gamma, p\}$ (plasticité d'un solide déformable isotrope)

**Loi d'évolution :** $\dot{p} = \mathscr{H}(\gamma - p - \gamma_{lim})\,\langle\dot{\gamma}\rangle$ (états admissibles : $\gamma - p - \gamma_{lim} \leq 0$)

**Un chemin pour aller à un état admissible quelconque :**

$$\underbrace{E_0 = (T_0, 1, 0, 0)}_{\text{état de réf.}} \xrightarrow{\mathscr{C}(1)} E_1 = (T, 1, 0, 0) \xrightarrow{\mathscr{C}(2)} E_2 = (T, K_v, 0, 0) \xrightarrow{\mathscr{C}(3)}$$

$$E_3 = (T, K_v, \gamma_{lim}, 0) \xrightarrow{\mathscr{C}(4)} E_4 = (T, K_v, \gamma_{lim} + p, p)$$



# Construction d'une énergie libre (1/4)



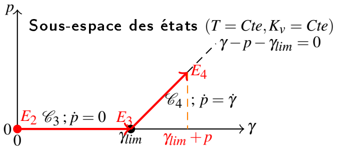
**Variables d'état :** $\{T, K_v, \gamma, p\}$ (plasticité d'un solide déformable isotrope)

**Loi d'évolution :** $\dot{p} = \mathscr{H}(\gamma - p - \gamma_{lim})\,\langle\dot{\gamma}\rangle$ (états admissibles : $\gamma - p - \gamma_{lim} \leq 0$)

**Un chemin pour aller à un état admissible quelconque :**

$$\underbrace{E_0 = (T_0, 1, 0, 0)}_{\text{état de réf.}} \xrightarrow{\mathscr{C}^{(1)}} E_1 = (T, 1, 0, 0) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(2)}} E_2 = (T, K_v, 0, 0) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(3)}}$$

$$E_3 = (T, K_v, \gamma_{lim}, 0) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(4)}} E_4 = (T, K_v, \gamma_{lim} + p, p) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(5)}} \underbrace{E_t = (T, K_v, \gamma, p)}_{\text{état final}}$$



# Construction d'une énergie libre (1/4)



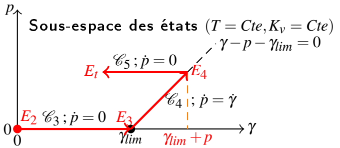
**Variables d'état :** $\{T, K_v, \gamma, p\}$ (plasticité d'un solide déformable isotrope)

**Loi d'évolution :** $\dot{p} = \mathscr{H}(\gamma - p - \gamma_{lim}) \langle \dot{\gamma} \rangle$ (états admissibles : $\gamma - p - \gamma_{lim} \leq 0$)

**Un chemin pour aller à un état admissible quelconque :**

$$\underbrace{E_0 = (T_0, 1, 0, 0)}_{\text{état de réf.}} \xrightarrow{\mathscr{C}^{(1)}} E_1 = (T, 1, 0, 0) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(2)}} E_2 = (T, K_v, 0, 0) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(3)}}$$

$$E_3 = (T, K_v, \gamma_{lim}, 0) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(4)}} E_4 = (T, K_v, \gamma_{lim} + p, p) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(5)}} \underbrace{E_t = (T, K_v, \gamma, p)}_{\text{état final}}$$



# Construction d'une énergie libre (1/4)



## Variables d'état : $\{T, K_v, \gamma, p\}$ (plasticité d'un solide déformable isotrope)

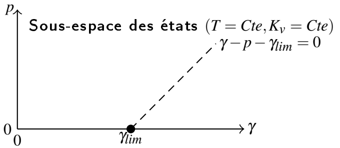
## Loi d'évolution : $\dot{p} = \mathscr{H}(\gamma - p - \gamma_{lim})\,\langle\dot{\gamma}\rangle$ (états admissibles : $\gamma - p - \gamma_{lim} \leq 0$)

## Un chemin pour aller à un état admissible quelconque :

$$\underbrace{E_0 = (T_0, 1, 0, 0)}_{\text{état de réf.}} \xrightarrow{\mathscr{C}^{(1)}} E_1 = (T, 1, 0, 0) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(2)}} E_2 = (T, K_v, 0, 0) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(3)}}$$

$$E_3 = (T, K_v, \gamma_{lim}, 0) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(4)}} E_4 = (T, K_v, \gamma_{lim} + p, p) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(5)}} \underbrace{E_t = (T, K_v, \gamma, p)}_{\text{état final}}$$

$$\psi_1^m - \psi_0^m = g^{(1)}(T)$$



# Construction d'une énergie libre (1/4)



## Variables d'état : $\{T, K_v, \gamma, p\}$ (plasticité d'un solide déformable isotrope)

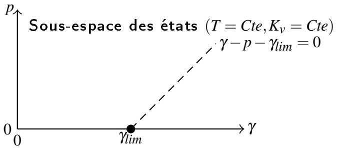
## Loi d'évolution : $\dot{p} = \mathscr{H}(\gamma - p - \gamma_{lim})\,\langle\dot{\gamma}\rangle$ (états admissibles : $\gamma - p - \gamma_{lim} \leq 0$)

## Un chemin pour aller à un état admissible quelconque :

$$\underbrace{E_0 = (T_0, 1, 0, 0)}_{\text{état de réf.}} \xrightarrow{\mathscr{C}^{(1)}} E_1 = (T, 1, 0, 0) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(2)}} E_2 = (T, K_v, 0, 0) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(3)}}$$

$$E_3 = (T, K_v, \gamma_{lim}, 0) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(4)}} E_4 = (T, K_v, \gamma_{lim} + p, p) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(5)}} \underbrace{E_t = (T, K_v, \gamma, p)}_{\text{état final}}$$

$$\psi_1^m - \psi_0^m = g^{(1)}(T) \qquad g^{(1)}(T_0) = 0$$



# Construction d'une énergie libre (1/4)



## Variables d'état : $\{T, K_v, \gamma, p\}$ (plasticité d'un solide déformable isotrope)

## Loi d'évolution : $\dot{p} = \mathscr{H}(\gamma - p - \gamma_{lim})\,\langle\dot{\gamma}\rangle$ (états admissibles : $\gamma - p - \gamma_{lim} \leq 0$)

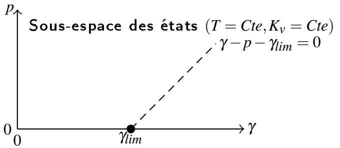
## Un chemin pour aller à un état admissible quelconque :

$$\underbrace{E_0 = (T_0, 1, 0, 0)}_{\text{état de réf.}} \xrightarrow{\mathscr{C}^{(1)}} E_1 = (T, 1, 0, 0) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(2)}} E_2 = (T, K_v, 0, 0) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(3)}}$$

$$E_3 = (T, K_v, \gamma_{lim}, 0) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(4)}} E_4 = (T, K_v, \gamma_{lim} + p, p) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(5)}} \underbrace{E_t = (T, K_v, \gamma, p)}_{\text{état final}}$$

$$\psi_1^m - \psi_0^m = g^{(1)}(T) \qquad g^{(1)}(T_0) = 0$$

$$\psi_2^m - \psi_1^m = g^{(2)}(T, K_v)$$



# Construction d'une énergie libre (1/4)



## Variables d'état : $\{T, K_v, \gamma, p\}$ (plasticité d'un solide déformable isotrope)

## Loi d'évolution : $\dot{p} = \mathscr{H}(\gamma - p - \gamma_{lim})\,\langle\dot{\gamma}\rangle$ (états admissibles : $\gamma - p - \gamma_{lim} \leq 0$)

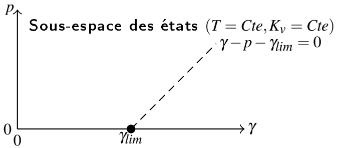
## Un chemin pour aller à un état admissible quelconque :

$$\underbrace{E_0 = (T_0, 1, 0, 0)}_{\text{état de réf.}} \xrightarrow{\mathscr{C}^{(1)}} E_1 = (T, 1, 0, 0) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(2)}} E_2 = (T, K_v, 0, 0) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(3)}}$$

$$E_3 = (T, K_v, \gamma_{lim}, 0) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(4)}} E_4 = (T, K_v, \gamma_{lim} + p, p) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(5)}} \underbrace{E_t = (T, K_v, \gamma, p)}_{\text{état final}}$$

$$\psi_1^m - \psi_0^m = g^{(1)}(T) \qquad g^{(1)}(T_0) = 0$$

$$\psi_2^m - \psi_1^m = g^{(2)}(T, K_v) \qquad \forall T,\ g^{(2)}(T, 1) = 0$$



# Construction d'une énergie libre (1/4)



## Variables d'état : $\{T, K_v, \gamma, p\}$ (plasticité d'un solide déformable isotrope)

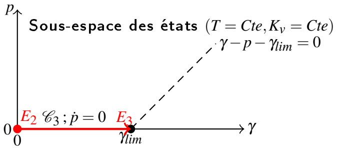
## Loi d'évolution : $\dot{p} = \mathscr{H}(\gamma - p - \gamma_{lim})\,\langle\dot{\gamma}\rangle$ (états admissibles : $\gamma - p - \gamma_{lim} \leq 0$)

## Un chemin pour aller à un état admissible quelconque :

$$\underbrace{E_0 = (T_0, 1, 0, 0)}_{\text{état de réf.}} \xrightarrow{\mathscr{C}^{(1)}} E_1 = (T, 1, 0, 0) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(2)}} E_2 = (T, K_v, 0, 0) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(3)}}$$

$$E_3 = (T, K_v, \gamma_{lim}, 0) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(4)}} E_4 = (T, K_v, \gamma_{lim} + p, p) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(5)}} \underbrace{E_t = (T, K_v, \gamma, p)}_{\text{état final}}$$

$$\begin{aligned}
\psi_1^m - \psi_0^m &= g^{(1)}(T) & \quad g^{(1)}(T_0) &= 0 \\
\psi_2^m - \psi_1^m &= g^{(2)}(T, K_v) & \quad \forall T,\ g^{(2)}(T, 1) &= 0 \\
\psi_3^m - \psi_2^m &= g^{(3)}(T, K_v, \gamma_{lim}) & &
\end{aligned}$$



# Construction d'une énergie libre (1/4)



## Variables d'état : $\{T, K_v, \gamma, p\}$ (plasticité d'un solide déformable isotrope)

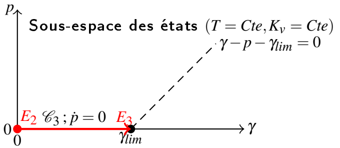
## Loi d'évolution : $\dot{p} = \mathscr{H}(\gamma - p - \gamma_{lim}) \langle \dot{\gamma} \rangle$ (états admissibles : $\gamma - p - \gamma_{lim} \leq 0$)

## Un chemin pour aller à un état admissible quelconque :

$$\underbrace{E_0 = (T_0, 1, 0, 0)}_{\text{état de réf.}} \xrightarrow{\mathscr{C}^{(1)}} E_1 = (T, 1, 0, 0) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(2)}} E_2 = (T, K_v, 0, 0) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(3)}}$$

$$E_3 = (T, K_v, \gamma_{lim}, 0) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(4)}} E_4 = (T, K_v, \gamma_{lim} + p, p) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(5)}} \underbrace{E_t = (T, K_v, \gamma, p)}_{\text{état final}}$$

$$\psi_1^m - \psi_0^m = g^{(1)}(T) \qquad g^{(1)}(T_0) = 0$$
$$\psi_2^m - \psi_1^m = g^{(2)}(T, K_v) \qquad \forall T,\ g^{(2)}(T, 1) = 0$$
$$\psi_3^m - \psi_2^m = g^{(3)}(T, K_v, \gamma_{lim}) \qquad \forall T \forall K_v,\ g^{(3)}(T, K_v, 0) = 0$$



# Construction d'une énergie libre (1/4)



## Variables d'état : $\{T, K_v, \gamma, p\}$ (plasticité d'un solide déformable isotrope)

## Loi d'évolution : $\dot{p} = \mathscr{H}(\gamma - p - \gamma_{lim})\langle\dot{\gamma}\rangle$ (états admissibles : $\gamma - p - \gamma_{lim} \leq 0$)

## Un chemin pour aller à un état admissible quelconque :

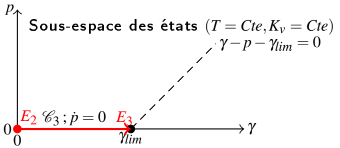
$$\underbrace{E_0 = (T_0, 1, 0, 0)}_{\text{état de réf.}} \xrightarrow{\mathscr{C}^{(1)}} E_1 = (T, 1, 0, 0) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(2)}} E_2 = (T, K_v, 0, 0) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(3)}}$$

$$E_3 = (T, K_v, \gamma_{lim}, 0) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(4)}} E_4 = (T, K_v, \gamma_{lim} + p, p) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(5)}} \underbrace{E_t = (T, K_v, \gamma, p)}_{\text{état final}}$$

$$\psi_1^m - \psi_0^m = g^{(1)}(T) \qquad g^{(1)}(T_0) = 0$$

$$\psi_2^m - \psi_1^m = g^{(2)}(T, K_v) \qquad \forall T,\ g^{(2)}(T, 1) = 0$$

$$\psi_3^m - \psi_2^m = g^{(3)}(T, K_v, \gamma_{lim}) \qquad \forall T \forall K_v,\ g^{(3)}(T, K_v, 0) = 0$$ (si $\gamma_{lim} = 0$, plastif. immédiate)



# Construction d'une énergie libre (1/4)



## Variables d'état : $\{T, K_v, \gamma, p\}$ (plasticité d'un solide déformable isotrope)

## Loi d'évolution : $\dot{p} = \mathscr{H}(\gamma - p - \gamma_{lim})\,\langle\dot{\gamma}\rangle$ (états admissibles : $\gamma - p - \gamma_{lim} \leq 0$)

## Un chemin pour aller à un état admissible quelconque :

$$\underbrace{E_0 = (T_0, 1, 0, 0)}_{\text{état de réf.}} \xrightarrow{\mathscr{C}^{(1)}} E_1 = (T, 1, 0, 0) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(2)}} E_2 = (T, K_v, 0, 0) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(3)}}$$

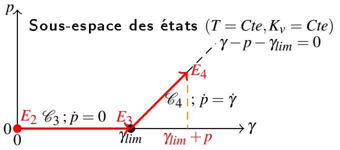
$$E_3 = (T, K_v, \gamma_{lim}, 0) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(4)}} E_4 = (T, K_v, \gamma_{lim} + p, p) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(5)}} \underbrace{E_t = (T, K_v, \gamma, p)}_{\text{état final}}$$

$$\psi_1^m - \psi_0^m = g^{(1)}(T) \qquad g^{(1)}(T_0) = 0$$

$$\psi_2^m - \psi_1^m = g^{(2)}(T, K_v) \qquad \forall T,\ g^{(2)}(T, 1) = 0$$

$$\psi_3^m - \psi_2^m = g^{(3)}(T, K_v, \gamma_{lim}) \qquad \forall T \forall K_v,\ g^{(3)}(T, K_v, 0) = 0$$ (si $\gamma_{lim} = 0$, plastif. immédiate)

$$\psi_4^m - \psi_3^m = g^{(4)}(T, K_v, p)$$



# Construction d'une énergie libre (1/4)



**Variables d'état :** $\{T, K_v, \gamma, p\}$ (plasticité d'un solide déformable isotrope)

**Loi d'évolution :** $\dot{p} = \mathscr{H}(\gamma - p - \gamma_{lim})\,\langle\dot{\gamma}\rangle$ (états admissibles : $\gamma - p - \gamma_{lim} \leq 0$)

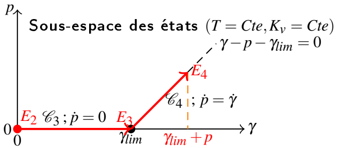
**Un chemin pour aller à un état admissible quelconque :**

$$\underbrace{E_0 = (T_0, 1, 0, 0)}_{\text{état de réf.}} \xrightarrow{\mathscr{C}^{(1)}} E_1 = (T, 1, 0, 0) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(2)}} E_2 = (T, K_v, 0, 0) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(3)}}$$

$$E_3 = (T, K_v, \gamma_{lim}, 0) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(4)}} E_4 = (T, K_v, \gamma_{lim} + p, p) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(5)}} \underbrace{E_t = (T, K_v, \gamma, p)}_{\text{état final}}$$

$$\begin{array}{ll}
\psi_1^m - \psi_0^m = g^{(1)}(T) & g^{(1)}(T_0) = 0 \\
\psi_2^m - \psi_1^m = g^{(2)}(T, K_v) & \forall T,\ g^{(2)}(T, 1) = 0 \\
\psi_3^m - \psi_2^m = g^{(3)}(T, K_v, \gamma_{lim}) & \forall T \forall K_v,\ g^{(3)}(T, K_v, 0) = 0 \\
\psi_4^m - \psi_3^m = g^{(4)}(T, K_v, p) & \forall T \forall K_v,\ g^{(4)}(T, K_v, 0) = 0
\end{array}$$

(si $\gamma_{lim} = 0$, plastif. immédiate)



# Construction d'une énergie libre (1/4)



## Variables d'état : $\{T, K_v, \gamma, p\}$ (plasticité d'un solide déformable isotrope)

## Loi d'évolution : $\dot{p} = \mathscr{H}(\gamma - p - \gamma_{lim}) \langle \dot{\gamma} \rangle$ (états admissibles : $\gamma - p - \gamma_{lim} \leq 0$)

## Un chemin pour aller à un état admissible quelconque :

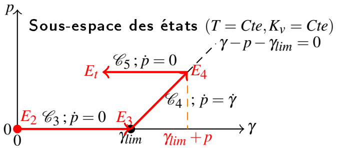
$$\underbrace{E_0 = (T_0, 1, 0, 0)}_{\text{état de réf.}} \xrightarrow{\mathscr{C}^{(1)}} E_1 = (T, 1, 0, 0) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(2)}} E_2 = (T, K_v, 0, 0) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(3)}}$$

$$E_3 = (T, K_v, \gamma_{lim}, 0) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(4)}} E_4 = (T, K_v, \gamma_{lim} + p, p) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(5)}} \underbrace{E_t = (T, K_v, \gamma, p)}_{\text{état final}}$$

$$\psi_1^m - \psi_0^m = g^{(1)}(T) \qquad g^{(1)}(T_0) = 0$$
$$\psi_2^m - \psi_1^m = g^{(2)}(T, K_v) \qquad \forall T,\ g^{(2)}(T, 1) = 0$$
$$\psi_3^m - \psi_2^m = g^{(3)}(T, K_v, \gamma_{lim}) \qquad \forall T \forall K_v,\ g^{(3)}(T, K_v, 0) = 0$$

(si $\gamma_{lim} = 0$, plastif. immédiate)

$$\psi_4^m - \psi_3^m = g^{(4)}(T, K_v, p) \qquad \forall T \forall K_v,\ g^{(4)}(T, K_v, 0) = 0$$
$$\psi^m - \psi_4^m = g^{(5)}(T, K_v, \gamma, p)$$



# Construction d'une énergie libre (1/4)



## Variables d'état : $\{T, K_v, \gamma, p\}$ (plasticité d'un solide déformable isotrope)

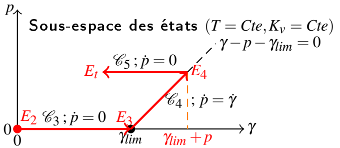
## Loi d'évolution : $\dot{p} = \mathscr{H}(\gamma - p - \gamma_{lim})\langle\dot{\gamma}\rangle$ (états admissibles : $\gamma - p - \gamma_{lim} \leq 0$)

## Un chemin pour aller à un état admissible quelconque :

$$\underbrace{E_0 = (T_0, 1, 0, 0)}_{\text{état de réf.}} \xrightarrow{\mathscr{C}^{(1)}} E_1 = (T, 1, 0, 0) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(2)}} E_2 = (T, K_v, 0, 0) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(3)}}$$

$$E_3 = (T, K_v, \gamma_{lim}, 0) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(4)}} E_4 = (T, K_v, \gamma_{lim} + p, p) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(5)}} \underbrace{E_t = (T, K_v, \gamma, p)}_{\text{état final}}$$

$$
\begin{array}{ll}
\psi_1^m - \psi_0^m = g^{(1)}(T) & g^{(1)}(T_0) = 0 \\
\psi_2^m - \psi_1^m = g^{(2)}(T, K_v) & \forall T,\ g^{(2)}(T, 1) = 0 \\
\psi_3^m - \psi_2^m = g^{(3)}(T, K_v, \gamma_{lim}) & \forall T \forall K_v,\ g^{(3)}(T, K_v, 0) = 0 \quad (\text{si } \gamma_{lim} = 0, \text{ plastif. immédiate}) \\
\psi_4^m - \psi_3^m = g^{(4)}(T, K_v, p) & \forall T \forall K_v,\ g^{(4)}(T, K_v, 0) = 0 \\
\psi^m - \psi_4^m = g^{(5)}(T, K_v, \gamma, p) & \forall T \forall K_v \forall p,\ g^{(5)}(T, K_v, \gamma_{lim} + p, p) = 0
\end{array}
$$



# Construction d'une énergie libre (1/4)



## Variables d'état : $\{T, K_v, \gamma, p\}$ (plasticité d'un solide déformable isotrope)

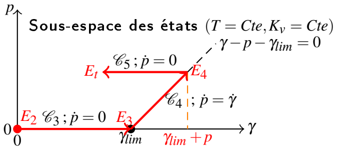
## Loi d'évolution : $\dot{p} = \mathscr{H}(\gamma - p - \gamma_{lim})\,\langle\dot{\gamma}\rangle$ (états admissibles : $\gamma - p - \gamma_{lim} \leq 0$)

## Un chemin pour aller à un état admissible quelconque :

$$\underbrace{E_0 = (T_0, 1, 0, 0)}_{\text{état de réf.}} \xrightarrow{\mathscr{C}^{(1)}} E_1 = (T, 1, 0, 0) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(2)}} E_2 = (T, K_v, 0, 0) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(3)}}$$

$$E_3 = (T, K_v, \gamma_{lim}, 0) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(4)}} E_4 = (T, K_v, \gamma_{lim} + p, p) \xrightarrow{\mathscr{C}^{(5)}} \underbrace{E_t = (T, K_v, \gamma, p)}_{\text{état final}}$$

$$\begin{array}{lll}
\psi_1^m - \psi_0^m = g^{(1)}(T) & g^{(1)}(T_0) = 0 & \\
\psi_2^m - \psi_1^m = g^{(2)}(T, K_v) & \forall T,\ g^{(2)}(T, 1) = 0 & \\
\psi_3^m - \psi_2^m = g^{(3)}(T, K_v, \gamma_{lim}) & \forall T \forall K_v,\ g^{(3)}(T, K_v, 0) = 0 & (\text{si } \gamma_{lim} = 0, \text{ plastif. immédiate}) \\
\psi_4^m - \psi_3^m = g^{(4)}(T, K_v, p) & \forall T \forall K_v,\ g^{(4)}(T, K_v, 0) = 0 & \\
\psi^m - \psi_4^m = g^{(5)}(T, K_v, \gamma, p) & \forall T \forall K_v \forall p,\ g^{(5)}(T, K_v, \gamma_{lim} + p, p) = 0 & (\text{si } \gamma = \gamma_{lim} + p \text{ : frontière})
\end{array}$$



# Construction d'une énergie libre (2/4)

# Construction d'une énergie libre (2/4)



## Fonctions d'état :

# Construction d'une énergie libre (2/4)



## Fonctions d'état :

$\bar{f}_{\psi} = g^{(1)}(T) +$

# Construction d'une énergie libre (2/4)



## Fonctions d'état :

$$\bar{f}_\psi = g^{(1)}(T) + g^{(2)}(T, K_v) +$$

# Construction d'une énergie libre (2/4)



## Fonctions d'état :

$$\bar{f}_\psi = g^{(1)}(T) + g^{(2)}(T, K_v) + g^{(3)}(T, K_v, \gamma_{lim}) +$$

# Construction d'une énergie libre (2/4)

## Fonctions d'état :

$$\bar{f}_\psi = g^{(1)}(T) + g^{(2)}(T, K_v) + g^{(3)}(T, K_v, \gamma_{lim}) + g^{(4)}(T, K_v, \gamma_{lim} + p, p) +$$

# Construction d'une énergie libre (2/4)



## Fonctions d'état :

$$\bar{f}_\psi = g^{(1)}(T) + g^{(2)}(T,K_v) + g^{(3)}(T,K_v,\gamma_{lim}) + g^{(4)}(T,K_v,\gamma_{lim}+p,p) + g^{(5)}(T,K_v,\gamma,p)$$

# Construction d'une énergie libre (2/4)



## Fonctions d'état :

$$\bar{f}_\psi = g^{(1)}(T) + g^{(2)}(T,K_v) + g^{(3)}(T,K_v,\gamma_{lim}) + g^{(4)}(T,K_v,\gamma_{lim}+p,p) + g^{(5)}(T,K_v,\gamma,p)$$

$$\bar{f}_s = -\partial_T \bar{f}_\psi$$

# Construction d'une énergie libre (2/4)



## Fonctions d'état :

$\bar{f}_\psi = g^{(1)}(T) + g^{(2)}(T, K_v) + g^{(3)}(T, K_v, \gamma_{lim}) + g^{(4)}(T, K_v, \gamma_{lim} + p, p) + g^{(5)}(T, K_v, \gamma, p)$

$\bar{f}_s = -\partial_T \bar{f}_\psi$ ; $\bar{f}_e = \bar{f}_\psi + T\bar{f}_s$ ;

# Construction d'une énergie libre (2/4)

## Fonctions d'état :

$$\bar{f}_\psi = g^{(1)}(T) + g^{(2)}(T,K_v) + g^{(3)}(T,K_v,\gamma_{lim}) + g^{(4)}(T,K_v,\gamma_{lim}+p,p) + g^{(5)}(T,K_v,\gamma,p)$$

$$\bar{f}_s = -\partial_T \bar{f}_\psi \;\; ; \;\; \bar{f}_e = \bar{f}_\psi + T\bar{f}_s \;\; ; \;\; \boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref} = \frac{\rho_0}{K_v}\left(\partial_{K_v}\bar{f}_\psi\, \boldsymbol{S}_{K_v} + \partial_\gamma \bar{f}_\psi\, \boldsymbol{S}_\gamma\right)$$

# Construction d'une énergie libre (2/4)



## Fonctions d'état :

$$\bar{f}_\psi = g^{(1)}(T) + g^{(2)}(T,K_v) + g^{(3)}(T,K_v,\gamma_{lim}) + g^{(4)}(T,K_v,\gamma_{lim}+p,p) + g^{(5)}(T,K_v,\gamma,p)$$

$$\bar{f}_s = -\partial_T \bar{f}_\psi \;\; ; \;\; \bar{f}_e = \bar{f}_\psi + T\bar{f}_s \;\; ; \;\; \boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref} = \frac{\rho_0}{K_v}\left(\partial_{K_v}\bar{f}_\psi\, \boldsymbol{S}_{K_v} + \partial_\gamma \bar{f}_\psi\, \boldsymbol{S}_\gamma\right) \quad \text{(fonctions des } g^{(\bullet)}\text{)}$$

# Construction d'une énergie libre (2/4)



## Fonctions d'état :

$$\bar{f}_\psi = g^{(1)}(T) + g^{(2)}(T,K_v) + g^{(3)}(T,K_v,\gamma_{lim}) + g^{(4)}(T,K_v,\gamma_{lim}+p,p) + g^{(5)}(T,K_v,\gamma,p)$$

$$\bar{f}_s = -\partial_T \bar{f}_\psi \;\; ; \;\; \bar{f}_e = \bar{f}_\psi + T\bar{f}_s \;\; ; \;\; \boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref} = \frac{\rho_0}{K_v}\left(\partial_{K_v}\bar{f}_\psi\, \boldsymbol{S}_{K_v} + \partial_\gamma \bar{f}_\psi\, \boldsymbol{S}_\gamma\right)$$ (fonctions des $g^{(\bullet)}$)

## Équations différentielles déterminant les $g^{(\bullet)}$ : (avec $D=0$)

# Construction d'une énergie libre (2/4)



## Fonctions d'état :

$$\bar{f}_\psi = g^{(1)}(T) + g^{(2)}(T,K_v) + g^{(3)}(T,K_v,\gamma_{lim}) + g^{(4)}(T,K_v,\gamma_{lim}+p,p) + g^{(5)}(T,K_v,\gamma,p)$$

$$\bar{f}_s = -\partial_T \bar{f}_\psi \;\; ; \;\; \bar{f}_e = \bar{f}_\psi + T\bar{f}_s \;\; ; \;\; \boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref} = \frac{\rho_0}{K_v}\left(\partial_{K_v}\bar{f}_\psi\, \boldsymbol{S}_{K_v} + \partial_\gamma \bar{f}_\psi\, \boldsymbol{S}_\gamma\right)$$ (fonctions des $g^{(\bullet)}$)

## Équations différentielles déterminant les $g^{(\bullet)}$ : (avec $D=0$)

$\mathscr{C}^{(1)}$ :

# Construction d'une énergie libre (2/4)



## Fonctions d'état :

$$\bar{f}_\psi = g^{(1)}(T) + g^{(2)}(T,K_v) + g^{(3)}(T,K_v,\gamma_{lim}) + g^{(4)}(T,K_v,\gamma_{lim}+p,p) + g^{(5)}(T,K_v,\gamma,p)$$

$$\bar{f}_s = -\partial_T \bar{f}_\psi \;\; ; \;\; \bar{f}_e = \bar{f}_\psi + T\bar{f}_s \;\; ; \;\; \boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref} = \frac{\rho_0}{K_v}\left(\partial_{K_v}\bar{f}_\psi\,\boldsymbol{S}_{K_v} + \partial_\gamma \bar{f}_\psi\,\boldsymbol{S}_\gamma\right)$$ (fonctions des $g^{(\bullet)}$)

## Équations différentielles déterminant les $g^{(\bullet)}$ : (avec $D=0$)

$\mathscr{C}^{(1)}$ : $\quad Q^{(1)}_{exp}(T) = \bar{f}_e(T,1,0,0)$

# Construction d'une énergie libre (2/4)



## Fonctions d'état :

$$\bar{f}_\psi = g^{(1)}(T) + g^{(2)}(T,K_v) + g^{(3)}(T,K_v,\gamma_{lim}) + g^{(4)}(T,K_v,\gamma_{lim}+p,p) + g^{(5)}(T,K_v,\gamma,p)$$

$$\bar{f}_s = -\partial_T \bar{f}_\psi \ ; \ \bar{f}_e = \bar{f}_\psi + T\bar{f}_s \ ; \ \boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref} = \frac{\rho_0}{K_v}\left(\partial_{K_v}\bar{f}_\psi\, \boldsymbol{S}_{K_v} + \partial_\gamma \bar{f}_\psi\, \boldsymbol{S}_\gamma\right)$$ (fonctions des $g^{(\bullet)}$)

## Équations différentielles déterminant les $g^{(\bullet)}$ : (avec $D = 0$)

$\mathscr{C}^{(1)}$ : $Q^{(1)}_{exp}(T) = \bar{f}_e(T,1,0,0)$ (conservation de l'énergie, J.kg$^{-1}$)

# Construction d'une énergie libre (2/4)



## Fonctions d'état :

$$\bar{f}_\psi = g^{(1)}(T) + g^{(2)}(T,K_v) + g^{(3)}(T,K_v,\gamma_{lim}) + g^{(4)}(T,K_v,\gamma_{lim}+p,p) + g^{(5)}(T,K_v,\gamma,p)$$

$$\bar{f}_s = -\partial_T \bar{f}_\psi \;\; ; \;\; \bar{f}_e = \bar{f}_\psi + T\bar{f}_s \;\; ; \;\; \boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref} = \frac{\rho_0}{K_v}\left(\partial_{K_v}\bar{f}_\psi \, \boldsymbol{S}_{K_v} + \partial_\gamma \bar{f}_\psi \, \boldsymbol{S}_\gamma\right)$$ (fonctions des $g^{(\bullet)}$)

## Équations différentielles déterminant les $g^{(\bullet)}$ : (avec $D = 0$)

$\mathscr{C}^{(1)}$ : $Q^{(1)}_{exp}(T) = \bar{f}_e(T,1,0,0)$ (conservation de l'énergie, J.kg$^{-1}$)

$\mathscr{C}^{(2)}$ :

# Construction d'une énergie libre (2/4)



## Fonctions d'état :

$$\bar{f}_\psi = g^{(1)}(T) + g^{(2)}(T,K_v) + g^{(3)}(T,K_v,\gamma_{lim}) + g^{(4)}(T,K_v,\gamma_{lim}+p,p) + g^{(5)}(T,K_v,\gamma,p)$$

$$\bar{f}_s = -\partial_T \bar{f}_\psi \ ; \ \bar{f}_e = \bar{f}_\psi + T\bar{f}_s \ ; \ \boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref} = \frac{\rho_0}{K_v}\left(\partial_{K_v}\bar{f}_\psi\, \boldsymbol{S}_{K_v} + \partial_\gamma \bar{f}_\psi\, \boldsymbol{S}_\gamma\right)$$ (fonctions des $g^{(\bullet)}$)

## Équations différentielles déterminant les $g^{(\bullet)}$ : (avec $D=0$)

$\mathscr{C}^{(1)}$ : $Q^{(1)}_{exp}(T) = \bar{f}_e(T,1,0,0)$ (conservation de l'énergie, $J.kg^{-1}$)

$\mathscr{C}^{(2)}$ : $\sigma^{(2)}_{exp}(T,K_v) = \left[\frac{1}{3}\,\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref}\right]_{(\gamma=0,p=0)}$

# Construction d'une énergie libre (2/4)



## Fonctions d'état :

$$\bar{f}_\psi = g^{(1)}(T) + g^{(2)}(T,K_v) + g^{(3)}(T,K_v,\gamma_{lim}) + g^{(4)}(T,K_v,\gamma_{lim}+p,p) + g^{(5)}(T,K_v,\gamma,p)$$

$$\bar{f}_s = -\partial_T \bar{f}_\psi \;\; ; \;\; \bar{f}_e = \bar{f}_\psi + T\bar{f}_s \;\; ; \;\; \boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref} = \frac{\rho_0}{K_v}\left(\partial_{K_v}\bar{f}_\psi\, \boldsymbol{S}_{K_v} + \partial_\gamma \bar{f}_\psi\, \boldsymbol{S}_\gamma\right)$$ (fonctions des $g^{(\bullet)}$)

## Équations différentielles déterminant les $g^{(\bullet)}$ : (avec $D=0$)

$\mathscr{C}^{(1)}$ : $Q^{(1)}_{exp}(T) = \bar{f}_e(T,1,0,0)$ (conservation de l'énergie, J.kg$^{-1}$)

$\mathscr{C}^{(2)}$ : $\sigma^{(2)}_{exp}(T,K_v) = \left[\frac{1}{3}\,\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref}\right]_{(\gamma=0,\,p=0)}$ (contrainte moyenne)

# Construction d'une énergie libre (2/4)



## Fonctions d'état :

$$\bar{f}_\psi = g^{(1)}(T) + g^{(2)}(T,K_v) + g^{(3)}(T,K_v,\gamma_{lim}) + g^{(4)}(T,K_v,\gamma_{lim}+p,p) + g^{(5)}(T,K_v,\gamma,p)$$

$$\bar{f}_s = -\partial_T \bar{f}_\psi \;\; ; \;\; \bar{f}_e = \bar{f}_\psi + T\bar{f}_s \;\; ; \;\; \boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref} = \frac{\rho_0}{K_v}\left(\partial_{K_v}\bar{f}_\psi\, \boldsymbol{S}_{K_v} + \partial_\gamma \bar{f}_\psi\, \boldsymbol{S}_\gamma\right)$$ (fonctions des $g^{(\bullet)}$)

## Équations différentielles déterminant les $g^{(\bullet)}$ : (avec $D=0$)

$\mathscr{C}^{(1)}$ : $Q^{(1)}_{exp}(T) = \bar{f}_e(T,1,0,0)$ (conservation de l'énergie, J.kg$^{-1}$)

$\mathscr{C}^{(2)}$ : $\sigma^{(2)}_{exp}(T,K_v) = \left[\frac{1}{3}\,\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref}\right]_{(\gamma=0,p=0)}$ (contrainte moyenne)

$\mathscr{C}^{(3)}$ :

# Construction d'une énergie libre (2/4)



## Fonctions d'état :

$$\overline{f}_\psi = g^{(1)}(T) + g^{(2)}(T,K_v) + g^{(3)}(T,K_v,\gamma_{lim}) + g^{(4)}(T,K_v,\gamma_{lim}+p,p) + g^{(5)}(T,K_v,\gamma,p)$$

$$\overline{f}_s = -\partial_T \overline{f}_\psi \ ; \ \overline{f}_e = \overline{f}_\psi + T\overline{f}_s \ ; \ \boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref} = \frac{\rho_0}{K_v}\left(\partial_{K_v}\overline{f}_\psi\, \boldsymbol{S}_{K_v} + \partial_\gamma \overline{f}_\psi\, \boldsymbol{S}_\gamma\right)$$ (fonctions des $g^{(\bullet)}$)

## Équations différentielles déterminant les $g^{(\bullet)}$ : (avec $D=0$)

$\mathscr{C}^{(1)}$ : $Q^{(1)}_{exp}(T) = \overline{f}_e(T,1,0,0)$ (conservation de l'énergie, $J.kg^{-1}$)

$\mathscr{C}^{(2)}$ : $\sigma^{(2)}_{exp}(T,K_v) = \left[\frac{1}{3}\operatorname{tr}\boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref}\right]_{(\gamma=0,p=0)}$ (contrainte moyenne)

$\mathscr{C}^{(3)}$ : $\tau^{(3)}_{exp}(T,K_v,\gamma_{lim}) = \left[\boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref}{}_{1}{}_{2}\right]_{(\gamma=\gamma_{lim},p=0)}$

# Construction d'une énergie libre (2/4)



## Fonctions d'état :

$$\bar{f}_\psi = g^{(1)}(T) + g^{(2)}(T,K_v) + g^{(3)}(T,K_v,\gamma_{lim}) + g^{(4)}(T,K_v,\gamma_{lim}+p,p) + g^{(5)}(T,K_v,\gamma,p)$$

$$\bar{f}_s = -\partial_T \bar{f}_\psi \;\; ; \;\; \bar{f}_e = \bar{f}_\psi + T\bar{f}_s \;\; ; \;\; \boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref} = \frac{\rho_0}{K_v}\left(\partial_{K_v}\bar{f}_\psi\, \boldsymbol{S}_{K_v} + \partial_\gamma \bar{f}_\psi\, \boldsymbol{S}_\gamma\right)$$ (fonctions des $g^{(\bullet)}$)

## Équations différentielles déterminant les $g^{(\bullet)}$ : (avec $D=0$)

$\mathscr{C}^{(1)}$ : $Q^{(1)}_{exp}(T) = \bar{f}_e(T,1,0,0)$ (conservation de l'énergie, J.kg$^{-1}$)

$\mathscr{C}^{(2)}$ : $\sigma^{(2)}_{exp}(T,K_v) = \left[\frac{1}{3}\,\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref}\right]_{(\gamma=0,p=0)}$ (contrainte moyenne)

$\mathscr{C}^{(3)}$ : $\tau^{(3)}_{exp}(T,K_v,\gamma_{lim}) = \left[\boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref}{}^{1}{}_{2}\right]_{(\gamma=\gamma_{lim},p=0)}$ (glissement dans le plan $(1,2)$, $\gamma : 0 \to \gamma_{lim}$)

# Construction d'une énergie libre (2/4)



## Fonctions d'état :

$$\bar{f}_\psi = g^{(1)}(T) + g^{(2)}(T,K_v) + g^{(3)}(T,K_v,\gamma_{lim}) + g^{(4)}(T,K_v,\gamma_{lim}+p,p) + g^{(5)}(T,K_v,\gamma,p)$$

$$\bar{f}_s = -\partial_T \bar{f}_\psi \;\; ; \;\; \bar{f}_e = \bar{f}_\psi + T\bar{f}_s \;\; ; \;\; \boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref} = \frac{\rho_0}{K_v}\left(\partial_{K_v}\bar{f}_\psi\, \boldsymbol{S}_{K_v} + \partial_\gamma \bar{f}_\psi\, \boldsymbol{S}_\gamma\right)$$ (fonctions des $g^{(\bullet)}$)

## Équations différentielles déterminant les $g^{(\bullet)}$ : (avec $D=0$)

$\mathscr{C}^{(1)}$ : $Q^{(1)}_{exp}(T) = \bar{f}_e(T,1,0,0)$ (conservation de l'énergie, J.kg$^{-1}$)

$\mathscr{C}^{(2)}$ : $\sigma^{(2)}_{exp}(T,K_v) = \left[\frac{1}{3}\,\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref}\right]_{(\gamma=0,p=0)}$ (contrainte moyenne)

$\mathscr{C}^{(3)}$ : $\tau^{(3)}_{exp}(T,K_v,\gamma_{lim}) = \left[\boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref}{}_{12}\right]_{(\gamma=\gamma_{lim},p=0)}$ (glissement dans le plan $(1,2)$, $\gamma : 0 \to \gamma_{lim}$)

$\mathscr{C}^{(4)}$ :

# Construction d'une énergie libre (2/4)



## Fonctions d'état :

$$\bar{f}_\psi = g^{(1)}(T) + g^{(2)}(T,K_v) + g^{(3)}(T,K_v,\gamma_{lim}) + g^{(4)}(T,K_v,\gamma_{lim}+p,p) + g^{(5)}(T,K_v,\gamma,p)$$

$$\bar{f}_s = -\partial_T \bar{f}_\psi \ ; \ \bar{f}_e = \bar{f}_\psi + T\bar{f}_s \ ; \ \boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref} = \frac{\rho_0}{K_v}\left(\partial_{K_v}\bar{f}_\psi \, \boldsymbol{S}_{K_v} + \partial_\gamma \bar{f}_\psi \, \boldsymbol{S}_\gamma\right)$$ (fonctions des $g^{(\bullet)}$)

## Équations différentielles déterminant les $g^{(\bullet)}$ : (avec $D=0$)

$\mathscr{C}^{(1)}$ : $Q^{(1)}_{exp}(T) = \bar{f}_e(T,1,0,0)$ (conservation de l'énergie, J.kg$^{-1}$)

$\mathscr{C}^{(2)}$ : $\sigma^{(2)}_{exp}(T,K_v) = \left[\frac{1}{3}\,\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref}\right]_{(\gamma=0,\,p=0)}$ (contrainte moyenne)

$\mathscr{C}^{(3)}$ : $\tau^{(3)}_{exp}(T,K_v,\gamma_{lim}) = \left[\boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref}{}^{1}{}_{2}\right]_{(\gamma=\gamma_{lim},\,p=0)}$ (glissement dans le plan $(1,2)$, $\gamma : 0 \to \gamma_{lim}$)

$\mathscr{C}^{(4)}$ : $\tau^{(4)}_{exp}(T,K_v,p) = \left[\boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref}{}^{1}{}_{2}\right]_{(\gamma=\gamma_{lim}+p)}$

# Construction d'une énergie libre (2/4)



## Fonctions d'état :

$$\bar{f}_\psi = g^{(1)}(T) + g^{(2)}(T,K_v) + g^{(3)}(T,K_v,\gamma_{lim}) + g^{(4)}(T,K_v,\gamma_{lim}+p,p) + g^{(5)}(T,K_v,\gamma,p)$$

$$\bar{f}_s = -\partial_T \bar{f}_\psi \;\; ; \;\; \bar{f}_e = \bar{f}_\psi + T\bar{f}_s \;\; ; \;\; \boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref} = \frac{\rho_0}{K_v}\left(\partial_{K_v}\bar{f}_\psi\, \boldsymbol{S}_{K_v} + \partial_\gamma \bar{f}_\psi\, \boldsymbol{S}_\gamma\right)$$ (fonctions des $g^{(\bullet)}$)

## Équations différentielles déterminant les $g^{(\bullet)}$ : (avec $D=0$)

$\mathscr{C}^{(1)}$ : $Q^{(1)}_{exp}(T) = \bar{f}_e(T,1,0,0)$ (conservation de l'énergie, J.kg$^{-1}$)

$\mathscr{C}^{(2)}$ : $\sigma^{(2)}_{exp}(T,K_v) = \left[\frac{1}{3}\,\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref}\right]_{(\gamma=0,p=0)}$ (contrainte moyenne)

$\mathscr{C}^{(3)}$ : $\tau^{(3)}_{exp}(T,K_v,\gamma_{lim}) = \left[\boldsymbol{\sigma}^{(p)1}_{ref\;\;2}\right]_{(\gamma=\gamma_{lim},p=0)}$ (glissement dans le plan $(1,2)$, $\gamma : 0 \to \gamma_{lim}$)

$\mathscr{C}^{(4)}$ : $\tau^{(4)}_{exp}(T,K_v,p) = \left[\boldsymbol{\sigma}^{(p)1}_{ref\;\;2}\right]_{(\gamma=\gamma_{lim}+p)}$ (glissement dans le plan $(1,2)$, $\gamma = \gamma_{lim}+p$)

# Construction d'une énergie libre (2/4)



## Fonctions d'état :

$$\bar{f}_\psi = g^{(1)}(T) + g^{(2)}(T,K_v) + g^{(3)}(T,K_v,\gamma_{lim}) + g^{(4)}(T,K_v,\gamma_{lim}+p,p) + g^{(5)}(T,K_v,\gamma,p)$$

$$\bar{f}_s = -\partial_T \bar{f}_\psi \;\; ; \;\; \bar{f}_e = \bar{f}_\psi + T\bar{f}_s \;\; ; \;\; \boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref} = \frac{\rho_0}{K_v}\left(\partial_{K_v}\bar{f}_\psi\, \boldsymbol{S}_{K_v} + \partial_\gamma \bar{f}_\psi\, \boldsymbol{S}_\gamma\right)$$ (fonctions des $g^{(\bullet)}$)

## Équations différentielles déterminant les $g^{(\bullet)}$ : (avec $\boldsymbol{D}=\boldsymbol{0}$)

$\mathscr{C}^{(1)}$ : $Q^{(1)}_{exp}(T) = \bar{f}_e(T,1,0,0)$ (conservation de l'énergie, J.kg$^{-1}$)

$\mathscr{C}^{(2)}$ : $\sigma^{(2)}_{exp}(T,K_v) = \left[\frac{1}{3}\,\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref}\right]_{(\gamma=0,p=0)}$ (contrainte moyenne)

$\mathscr{C}^{(3)}$ : $\tau^{(3)}_{exp}(T,K_v,\gamma_{lim}) = \left[\boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref}{}^{1}{}_{2}\right]_{(\gamma=\gamma_{lim},p=0)}$ (glissement dans le plan $(1,2)$, $\gamma: 0 \to \gamma_{lim}$)

$\mathscr{C}^{(4)}$ : $\tau^{(4)}_{exp}(T,K_v,p) = \left[\boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref}{}^{1}{}_{2}\right]_{(\gamma=\gamma_{lim}+p)}$ (glissement dans le plan $(1,2)$, $\gamma = \gamma_{lim}+p$)

$\mathscr{C}^{(5)}$ :

# Construction d'une énergie libre (2/4)



## Fonctions d'état :

$$\bar{f}_\psi = g^{(1)}(T) + g^{(2)}(T,K_v) + g^{(3)}(T,K_v,\gamma_{lim}) + g^{(4)}(T,K_v,\gamma_{lim}+p,p) + g^{(5)}(T,K_v,\gamma,p)$$

$$\bar{f}_s = -\partial_T \bar{f}_\psi \ ; \ \bar{f}_e = \bar{f}_\psi + T\bar{f}_s \ ; \ \boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref} = \frac{\rho_0}{K_v}\left(\partial_{K_v}\bar{f}_\psi\,\boldsymbol{S}_{K_v} + \partial_\gamma \bar{f}_\psi\,\boldsymbol{S}_\gamma\right)$$ (fonctions des $g^{(\bullet)}$)

## Équations différentielles déterminant les $g^{(\bullet)}$ : (avec $D=0$)

$\mathscr{C}^{(1)}$ : $Q^{(1)}_{exp}(T) = \bar{f}_e(T,1,0,0)$ (conservation de l'énergie, J.kg$^{-1}$)

$\mathscr{C}^{(2)}$ : $\sigma^{(2)}_{exp}(T,K_v) = \left[\frac{1}{3}\,\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref}\right]_{(\gamma=0,p=0)}$ (contrainte moyenne)

$\mathscr{C}^{(3)}$ : $\tau^{(3)}_{exp}(T,K_v,\gamma_{lim}) = \left[\boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref}{}^{1}{}_{2}\right]_{(\gamma=\gamma_{lim},p=0)}$ (glissement dans le plan $(1,2)$, $\gamma : 0 \to \gamma_{lim}$)

$\mathscr{C}^{(4)}$ : $\tau^{(4)}_{exp}(T,K_v,p) = \left[\boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref}{}^{1}{}_{2}\right]_{(\gamma=\gamma_{lim}+p)}$ (glissement dans le plan $(1,2)$, $\gamma=\gamma_{lim}+p$)

$\mathscr{C}^{(5)}$ : $\tau^{(5)}_{exp}(T,K_v,\gamma,p) = \boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref}{}^{1}{}_{2}$

# Construction d'une énergie libre (2/4)



## Fonctions d'état :

$$\bar{f}_\psi = g^{(1)}(T) + g^{(2)}(T,K_v) + g^{(3)}(T,K_v,\gamma_{lim}) + g^{(4)}(T,K_v,\gamma_{lim}+p,p) + g^{(5)}(T,K_v,\gamma,p)$$

$$\bar{f}_s = -\partial_T \bar{f}_\psi \ ; \ \bar{f}_e = \bar{f}_\psi + T\bar{f}_s \ ; \ \boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref} = \frac{\rho_0}{K_v}\left(\partial_{K_v}\bar{f}_\psi \, \boldsymbol{S}_{K_v} + \partial_\gamma \bar{f}_\psi \, \boldsymbol{S}_\gamma\right)$$ (fonctions des $g^{(\bullet)}$)

## Équations différentielles déterminant les $g^{(\bullet)}$ : (avec $D=0$)

$\mathscr{C}^{(1)}$ : $Q^{(1)}_{exp}(T) = \bar{f}_e(T,1,0,0)$ (conservation de l'énergie, $\mathrm{J.kg^{-1}}$)

$\mathscr{C}^{(2)}$ : $\sigma^{(2)}_{exp}(T,K_v) = \left[\frac{1}{3}\,\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref}\right]_{(\gamma=0,p=0)}$ (contrainte moyenne)

$\mathscr{C}^{(3)}$ : $\tau^{(3)}_{exp}(T,K_v,\gamma_{lim}) = \left[\boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref}{}^{1}{}_{2}\right]_{(\gamma=\gamma_{lim},p=0)}$ (glissement dans le plan $(1,2)$, $\gamma : 0 \to \gamma_{lim}$)

$\mathscr{C}^{(4)}$ : $\tau^{(4)}_{exp}(T,K_v,p) = \left[\boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref}{}^{1}{}_{2}\right]_{(\gamma=\gamma_{lim}+p)}$ (glissement dans le plan $(1,2)$, $\gamma = \gamma_{lim}+p$)

$\mathscr{C}^{(5)}$ : $\tau^{(5)}_{exp}(T,K_v,\gamma,p) = \boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref}{}^{1}{}_{2}$ (glissement dans le plan $(1,2)$, $\gamma < \gamma_{lim}+p$)

# Construction d'une énergie libre (2/4)



## Fonctions d'état :

$$\bar{f}_\psi = g^{(1)}(T) + g^{(2)}(T,K_v) + g^{(3)}(T,K_v,\gamma_{lim}) + g^{(4)}(T,K_v,\gamma_{lim}+p,p) + g^{(5)}(T,K_v,\gamma,p)$$

$$\bar{f}_s = -\partial_T \bar{f}_\psi \; ; \; \bar{f}_e = \bar{f}_\psi + T\bar{f}_s \; ; \; \boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref} = \frac{\rho_0}{K_v}\left(\partial_{K_v}\bar{f}_\psi \, \boldsymbol{S}_{K_v} + \partial_\gamma \bar{f}_\psi \, \boldsymbol{S}_\gamma\right)$$ (fonctions des $g^{(\bullet)}$)

## Équations différentielles déterminant les $g^{(\bullet)}$ : (avec $D=0$)

$\mathscr{C}^{(1)}$ : $Q^{(1)}_{exp}(T) = \bar{f}_e(T,1,0,0)$ (conservation de l'énergie, $J.kg^{-1}$)

$\mathscr{C}^{(2)}$ : $\sigma^{(2)}_{exp}(T,K_v) = \left[\frac{1}{3}\,\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref}\right]_{(\gamma=0,p=0)}$ (contrainte moyenne)

$\mathscr{C}^{(3)}$ : $\tau^{(3)}_{exp}(T,K_v,\gamma_{lim}) = \left[\boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref}{}^{1}{}_{2}\right]_{(\gamma=\gamma_{lim},p=0)}$ (glissement dans le plan $(1,2)$, $\gamma : 0 \to \gamma_{lim}$)

$\mathscr{C}^{(4)}$ : $\tau^{(4)}_{exp}(T,K_v,p) = \left[\boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref}{}^{1}{}_{2}\right]_{(\gamma=\gamma_{lim}+p)}$ (glissement dans le plan $(1,2)$, $\gamma = \gamma_{lim}+p$)

$\mathscr{C}^{(5)}$ : $\tau^{(5)}_{exp}(T,K_v,\gamma,p) = \boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref}{}^{1}{}_{2}$ (glissement dans le plan $(1,2)$, $\gamma < \gamma_{lim}+p$)

$\bar{f}_\psi$ :

# Construction d'une énergie libre (2/4)



## Fonctions d'état :

$$\bar{f}_\psi = g^{(1)}(T) + g^{(2)}(T,K_v) + g^{(3)}(T,K_v,\gamma_{lim}) + g^{(4)}(T,K_v,\gamma_{lim}+p,p) + g^{(5)}(T,K_v,\gamma,p)$$

$$\bar{f}_s = -\partial_T \bar{f}_\psi \;\; ; \;\; \bar{f}_e = \bar{f}_\psi + T\bar{f}_s \;\; ; \;\; \boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref} = \frac{\rho_0}{K_v}\left(\partial_{K_v}\bar{f}_\psi\, \boldsymbol{S}_{K_v} + \partial_\gamma \bar{f}_\psi\, \boldsymbol{S}_\gamma\right)$$ (fonctions des $g^{(\bullet)}$)

## Équations différentielles déterminant les $g^{(\bullet)}$ : (avec $D=0$)

$\mathscr{C}^{(1)}$ : $Q^{(1)}_{exp}(T) = \bar{f}_e(T,1,0,0)$ (conservation de l'énergie, J.kg$^{-1}$)

$\mathscr{C}^{(2)}$ : $\sigma^{(2)}_{exp}(T,K_v) = \left[\frac{1}{3}\,\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref}\right]_{(\gamma=0,p=0)}$ (contrainte moyenne)

$\mathscr{C}^{(3)}$ : $\tau^{(3)}_{exp}(T,K_v,\gamma_{lim}) = \left[\boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref}{}^{1}{}_{2}\right]_{(\gamma=\gamma_{lim},p=0)}$ (glissement dans le plan $(1,2)$, $\gamma : 0 \to \gamma_{lim}$)

$\mathscr{C}^{(4)}$ : $\tau^{(4)}_{exp}(T,K_v,p) = \left[\boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref}{}^{1}{}_{2}\right]_{(\gamma=\gamma_{lim}+p)}$ (glissement dans le plan $(1,2)$, $\gamma = \gamma_{lim}+p$)

$\mathscr{C}^{(5)}$ : $\tau^{(5)}_{exp}(T,K_v,\gamma,p) = \boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref}{}^{1}{}_{2}$ (glissement dans le plan $(1,2)$, $\gamma < \gamma_{lim}+p$)

$\bar{f}_\psi$ : $\left[\partial_p \bar{f}_\psi\right]_{(\gamma=\gamma_{lim}+p)} = 0$

# Construction d'une énergie libre (2/4)



## Fonctions d'état :

$$\bar{f}_\psi = g^{(1)}(T) + g^{(2)}(T,K_v) + g^{(3)}(T,K_v,\gamma_{lim}) + g^{(4)}(T,K_v,\gamma_{lim}+p,p) + g^{(5)}(T,K_v,\gamma,p)$$

$$\bar{f}_s = -\partial_T \bar{f}_\psi \;\; ; \;\; \bar{f}_e = \bar{f}_\psi + T\bar{f}_s \;\; ; \;\; \boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref} = \frac{\rho_0}{K_v}\left(\partial_{K_v}\bar{f}_\psi\, \boldsymbol{S}_{K_v} + \partial_\gamma \bar{f}_\psi\, \boldsymbol{S}_\gamma\right)$$ (fonctions des $g^{(\bullet)}$)

## Équations différentielles déterminant les $g^{(\bullet)}$ : (avec $D=0$)

$\mathscr{C}^{(1)}$ : $Q^{(1)}_{exp}(T) = \bar{f}_e(T,1,0,0)$ (conservation de l'énergie, J.kg$^{-1}$)

$\mathscr{C}^{(2)}$ : $\sigma^{(2)}_{exp}(T,K_v) = \left[\frac{1}{3}\,\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref}\right]_{(\gamma=0,p=0)}$ (contrainte moyenne)

$\mathscr{C}^{(3)}$ : $\tau^{(3)}_{exp}(T,K_v,\gamma_{lim}) = \left[\boldsymbol{\sigma}^{(p)\,1}_{ref\;\;\;2}\right]_{(\gamma=\gamma_{lim},p=0)}$ (glissement dans le plan $(1,2)$, $\gamma : 0 \to \gamma_{lim}$)

$\mathscr{C}^{(4)}$ : $\tau^{(4)}_{exp}(T,K_v,p) = \left[\boldsymbol{\sigma}^{(p)\,1}_{ref\;\;\;2}\right]_{(\gamma=\gamma_{lim}+p)}$ (glissement dans le plan $(1,2)$, $\gamma = \gamma_{lim}+p$)

$\mathscr{C}^{(5)}$ : $\tau^{(5)}_{exp}(T,K_v,\gamma,p) = \boldsymbol{\sigma}^{(p)\,1}_{ref\;\;\;2}$ (glissement dans le plan $(1,2)$, $\gamma < \gamma_{lim}+p$)

$\bar{f}_\psi$ : $\left[\partial_p \bar{f}_\psi\right]_{(\gamma=\gamma_{lim}+p)} = 0$ (continuité de $\boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref}$)

# Construction d'une énergie libre (2/4)



## Fonctions d'état :

$$\bar{f}_\psi = g^{(1)}(T) + g^{(2)}(T,K_v) + g^{(3)}(T,K_v,\gamma_{lim}) + g^{(4)}(T,K_v,\gamma_{lim}+p,p) + g^{(5)}(T,K_v,\gamma,p)$$

$$\bar{f}_s = -\partial_T \bar{f}_\psi \;;\; \bar{f}_e = \bar{f}_\psi + T\bar{f}_s \;;\; \boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref} = \frac{\rho_0}{K_v}\left(\partial_{K_v}\bar{f}_\psi\, \boldsymbol{S}_{K_v} + \partial_\gamma \bar{f}_\psi\, \boldsymbol{S}_\gamma\right)$$ (fonctions des $g^{(\bullet)}$)

## Équations différentielles déterminant les $g^{(\bullet)}$ : (avec $D=0$)

| | | |
|---|---|---|
| $\mathscr{C}^{(1)}$ : | $Q^{(1)}_{exp}(T) = \bar{f}_e(T,1,0,0)$ | (conservation de l'énergie, J.kg$^{-1}$) |
| $\mathscr{C}^{(2)}$ : | $\sigma^{(2)}_{exp}(T,K_v) = \left[\frac{1}{3}\,\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref}\right]_{(\gamma=0,p=0)}$ | (contrainte moyenne) |
| $\mathscr{C}^{(3)}$ : | $\tau^{(3)}_{exp}(T,K_v,\gamma_{lim}) = \left[\boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref}{}^{1}{}_{2}\right]_{(\gamma=\gamma_{lim},p=0)}$ | (glissement dans le plan $(1,2)$, $\gamma : 0 \to \gamma_{lim}$) |
| $\mathscr{C}^{(4)}$ : | $\tau^{(4)}_{exp}(T,K_v,p) = \left[\boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref}{}^{1}{}_{2}\right]_{(\gamma=\gamma_{lim}+p)}$ | (glissement dans le plan $(1,2)$, $\gamma = \gamma_{lim}+p$) |
| $\mathscr{C}^{(5)}$ : | $\tau^{(5)}_{exp}(T,K_v,\gamma,p) = \boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref}{}^{1}{}_{2}$ | (glissement dans le plan $(1,2)$, $\gamma < \gamma_{lim}+p$) |
| $\bar{f}_\psi$ : | $\left[\partial_p \bar{f}_\psi\right]_{(\gamma=\gamma_{lim}+p)} = 0$ | (continuité de $\boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref}$) |

## Solution :

# Construction d'une énergie libre (2/4)



## Fonctions d'état :

$$\bar{f}_\psi = g^{(1)}(T) + g^{(2)}(T,K_v) + g^{(3)}(T,K_v,\gamma_{lim}) + g^{(4)}(T,K_v,\gamma_{lim}+p,p) + g^{(5)}(T,K_v,\gamma,p)$$

$$\bar{f}_s = -\partial_T \bar{f}_\psi \;;\; \bar{f}_e = \bar{f}_\psi + T\bar{f}_s \;;\; \boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref} = \frac{\rho_0}{K_v}\left(\partial_{K_v}\bar{f}_\psi\, \boldsymbol{S}_{K_v} + \partial_\gamma \bar{f}_\psi\, \boldsymbol{S}_\gamma\right)$$ (fonctions des $g^{(\bullet)}$)

## Équations différentielles déterminant les $g^{(\bullet)}$ : (avec $D=0$)

| | | |
|---|---|---|
| $\mathscr{C}^{(1)}$ : | $Q^{(1)}_{exp}(T) = \bar{f}_e(T,1,0,0)$ | (conservation de l'énergie, J.kg$^{-1}$) |
| $\mathscr{C}^{(2)}$ : | $\sigma^{(2)}_{exp}(T,K_v) = \left[\frac{1}{3}\,\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref}\right]_{(\gamma=0,p=0)}$ | (contrainte moyenne) |
| $\mathscr{C}^{(3)}$ : | $\tau^{(3)}_{exp}(T,K_v,\gamma_{lim}) = \left[\boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref}{}^{1}{}_{2}\right]_{(\gamma=\gamma_{lim},p=0)}$ | (glissement dans le plan $(1,2)$, $\gamma : 0 \to \gamma_{lim}$) |
| $\mathscr{C}^{(4)}$ : | $\tau^{(4)}_{exp}(T,K_v,p) = \left[\boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref}{}^{1}{}_{2}\right]_{(\gamma=\gamma_{lim}+p)}$ | (glissement dans le plan $(1,2)$, $\gamma = \gamma_{lim}+p$) |
| $\mathscr{C}^{(5)}$ : | $\tau^{(5)}_{exp}(T,K_v,\gamma,p) = \boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref}{}^{1}{}_{2}$ | (glissement dans le plan $(1,2)$, $\gamma < \gamma_{lim}+p$) |
| $\bar{f}_\psi$ : | $\left[\partial_p \bar{f}_\psi\right]_{(\gamma=\gamma_{lim}+p)} = 0$ | (continuité de $\boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref}$) |

**Solution :** on trouve les $g^{(\bullet)}$ en fonction des expériences.

# Construction d'une énergie libre (2/4)



## Fonctions d'état :

$$\bar{f}_\psi = g^{(1)}(T) + g^{(2)}(T,K_v) + g^{(3)}(T,K_v,\gamma_{lim}) + g^{(4)}(T,K_v,\gamma_{lim}+p,p) + g^{(5)}(T,K_v,\gamma,p)$$

$$\bar{f}_s = -\partial_T \bar{f}_\psi \;\; ; \;\; \bar{f}_e = \bar{f}_\psi + T\bar{f}_s \;\; ; \;\; \boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref} = \frac{\rho_0}{K_v}\left(\partial_{K_v}\bar{f}_\psi \, \boldsymbol{S}_{K_v} + \partial_\gamma \bar{f}_\psi \, \boldsymbol{S}_\gamma\right)$$ (fonctions des $g^{(\bullet)}$)

## Équations différentielles déterminant les $g^{(\bullet)}$ : (avec $D=0$)

| | | |
|---|---|---|
| $\mathscr{C}^{(1)}$ : | $Q^{(1)}_{exp}(T) = \bar{f}_e(T,1,0,0)$ | (conservation de l'énergie, J.kg$^{-1}$) |
| $\mathscr{C}^{(2)}$ : | $\sigma^{(2)}_{exp}(T,K_v) = \left[\frac{1}{3}\,\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref}\right]_{(\gamma=0,p=0)}$ | (contrainte moyenne) |
| $\mathscr{C}^{(3)}$ : | $\tau^{(3)}_{exp}(T,K_v,\gamma_{lim}) = \left[\boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref}{}^{1}{}_{2}\right]_{(\gamma=\gamma_{lim},p=0)}$ | (glissement dans le plan $(1,2)$, $\gamma : 0 \to \gamma_{lim}$) |
| $\mathscr{C}^{(4)}$ : | $\tau^{(4)}_{exp}(T,K_v,p) = \left[\boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref}{}^{1}{}_{2}\right]_{(\gamma=\gamma_{lim}+p)}$ | (glissement dans le plan $(1,2)$, $\gamma = \gamma_{lim}+p$) |
| $\mathscr{C}^{(5)}$ : | $\tau^{(5)}_{exp}(T,K_v,\gamma,p) = \boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref}{}^{1}{}_{2}$ | (glissement dans le plan $(1,2)$, $\gamma < \gamma_{lim}+p$) |
| $\bar{f}_\psi$ : | $\left[\partial_p \bar{f}_\psi\right]_{(\gamma=\gamma_{lim}+p)} = 0$ | (continuité de $\boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref}$) |

**Solution :** on trouve les $g^{(\bullet)}$ en fonction des expériences.

On en déduit $\bar{f}_\psi$

# Construction d'une énergie libre (2/4)



## Fonctions d'état :

$$\bar{f}_\psi = g^{(1)}(T) + g^{(2)}(T,K_v) + g^{(3)}(T,K_v,\gamma_{lim}) + g^{(4)}(T,K_v,\gamma_{lim}+p,p) + g^{(5)}(T,K_v,\gamma,p)$$

$$\bar{f}_s = -\partial_T \bar{f}_\psi \;;\; \bar{f}_e = \bar{f}_\psi + T\bar{f}_s \;;\; \boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref} = \frac{\rho_0}{K_v}\left(\partial_{K_v}\bar{f}_\psi\, \boldsymbol{S}_{K_v} + \partial_\gamma \bar{f}_\psi\, \boldsymbol{S}_\gamma\right)$$ (fonctions des $g^{(\bullet)}$)

## Équations différentielles déterminant les $g^{(\bullet)}$ : (avec $D=0$)

| | | |
|---|---|---|
| $\mathscr{C}^{(1)}$ : | $Q^{(1)}_{exp}(T) = \bar{f}_e(T,1,0,0)$ | (conservation de l'énergie, J.kg$^{-1}$) |
| $\mathscr{C}^{(2)}$ : | $\sigma^{(2)}_{exp}(T,K_v) = \left[\frac{1}{3}\,\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref}\right]_{(\gamma=0,p=0)}$ | (contrainte moyenne) |
| $\mathscr{C}^{(3)}$ : | $\tau^{(3)}_{exp}(T,K_v,\gamma_{lim}) = \left[\boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref}{}^{1}{}_{2}\right]_{(\gamma=\gamma_{lim},p=0)}$ | (glissement dans le plan $(1,2)$, $\gamma : 0 \to \gamma_{lim}$) |
| $\mathscr{C}^{(4)}$ : | $\tau^{(4)}_{exp}(T,K_v,p) = \left[\boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref}{}^{1}{}_{2}\right]_{(\gamma=\gamma_{lim}+p)}$ | (glissement dans le plan $(1,2)$, $\gamma = \gamma_{lim}+p$) |
| $\mathscr{C}^{(5)}$ : | $\tau^{(5)}_{exp}(T,K_v,\gamma,p) = \boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref}{}^{1}{}_{2}$ | (glissement dans le plan $(1,2)$, $\gamma < \gamma_{lim}+p$) |
| $\bar{f}_\psi$ : | $\left[\partial_p \bar{f}_\psi\right]_{(\gamma=\gamma_{lim}+p)} = 0$ | (continuité de $\boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref}$) |

**Solution :** on trouve les $g^{(\bullet)}$ en fonction des expériences.
On en déduit $\bar{f}_\psi$ puis $\bar{f}_s$, $\bar{f}_e$ et $\boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref}$.

# Construction d'une énergie libre (2/4)



## Fonctions d'état :

$$\bar{f}_\psi = g^{(1)}(T) + g^{(2)}(T,K_v) + g^{(3)}(T,K_v,\gamma_{lim}) + g^{(4)}(T,K_v,\gamma_{lim}+p,p) + g^{(5)}(T,K_v,\gamma,p)$$

$$\bar{f}_s = -\partial_T \bar{f}_\psi \ ; \ \bar{f}_e = \bar{f}_\psi + T\bar{f}_s \ ; \ \boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref} = \frac{\rho_0}{K_v}\left(\partial_{K_v}\bar{f}_\psi\, \boldsymbol{S}_{K_v} + \partial_\gamma \bar{f}_\psi\, \boldsymbol{S}_\gamma\right) \quad \text{(fonctions des } g^{(\bullet)}\text{)}$$

## Équations différentielles déterminant les $g^{(\bullet)}$ : (avec $\boldsymbol{D}=\boldsymbol{0}$)

| | | |
|---|---|---|
| $\mathscr{C}^{(1)}$ : | $Q^{(1)}_{exp}(T) = \bar{f}_e(T,1,0,0)$ | (conservation de l'énergie, J.kg$^{-1}$) |
| $\mathscr{C}^{(2)}$ : | $\sigma^{(2)}_{exp}(T,K_v) = \left[\frac{1}{3}\,\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref}\right]_{(\gamma=0,p=0)}$ | (contrainte moyenne) |
| $\mathscr{C}^{(3)}$ : | $\tau^{(3)}_{exp}(T,K_v,\gamma_{lim}) = \left[\boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref}{}^1{}_2\right]_{(\gamma=\gamma_{lim},p=0)}$ | (glissement dans le plan $(1,2)$, $\gamma : 0 \to \gamma_{lim}$) |
| $\mathscr{C}^{(4)}$ : | $\tau^{(4)}_{exp}(T,K_v,p) = \left[\boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref}{}^1{}_2\right]_{(\gamma=\gamma_{lim}+p)}$ | (glissement dans le plan $(1,2)$, $\gamma = \gamma_{lim}+p$) |
| $\mathscr{C}^{(5)}$ : | $\tau^{(5)}_{exp}(T,K_v,\gamma,p) = \boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref}{}^1{}_2$ | (glissement dans le plan $(1,2)$, $\gamma < \gamma_{lim}+p$) |
| $\bar{f}_\psi$ : | $\left[\partial_p \bar{f}_\psi\right]_{(\gamma=\gamma_{lim}+p)} = 0$ | (continuité de $\boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref}$) |

**Solution :** on trouve les $g^{(\bullet)}$ en fonction des expériences.
On en déduit $\bar{f}_\psi$ puis $\bar{f}_s$, $\bar{f}_e$ et $\boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref}$. (pdf, section 5.4)

# Construction d'une énergie libre (2/4)



## Fonctions d'état :

$$\bar{f}_\psi = g^{(1)}(T) + g^{(2)}(T,K_v) + g^{(3)}(T,K_v,\gamma_{lim}) + g^{(4)}(T,K_v,\gamma_{lim}+p,p) + g^{(5)}(T,K_v,\gamma,p)$$

$$\bar{f}_s = -\partial_T \bar{f}_\psi \ ; \ \bar{f}_e = \bar{f}_\psi + T\bar{f}_s \ ; \ \boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref} = \frac{\rho_0}{K_v}\left(\partial_{K_v}\bar{f}_\psi\, \boldsymbol{S}_{K_v} + \partial_\gamma \bar{f}_\psi\, \boldsymbol{S}_\gamma\right)$$ (fonctions des $g^{(\bullet)}$)

## Équations différentielles déterminant les $g^{(\bullet)}$ : (avec $D=0$)

| | | |
|---|---|---|
| $\mathscr{C}^{(1)}$ : | $Q^{(1)}_{exp}(T) = \bar{f}_e(T,1,0,0)$ | (conservation de l'énergie, J.kg$^{-1}$) |
| $\mathscr{C}^{(2)}$ : | $\sigma^{(2)}_{exp}(T,K_v) = \left[\frac{1}{3}\,\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref}\right]_{(\gamma=0,p=0)}$ | (contrainte moyenne) |
| $\mathscr{C}^{(3)}$ : | $\tau^{(3)}_{exp}(T,K_v,\gamma_{lim}) = \left[\boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref}{}^{1}{}_{2}\right]_{(\gamma=\gamma_{lim},p=0)}$ | (glissement dans le plan $(1,2)$, $\gamma : 0 \to \gamma_{lim}$) |
| $\mathscr{C}^{(4)}$ : | $\tau^{(4)}_{exp}(T,K_v,p) = \left[\boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref}{}^{1}{}_{2}\right]_{(\gamma=\gamma_{lim}+p)}$ | (glissement dans le plan $(1,2)$, $\gamma=\gamma_{lim}+p$) |
| $\mathscr{C}^{(5)}$ : | $\tau^{(5)}_{exp}(T,K_v,\gamma,p) = \boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref}{}^{1}{}_{2}$ | (glissement dans le plan $(1,2)$, $\gamma<\gamma_{lim}+p$) |
| $\bar{f}_\psi$ : | $\left[\partial_p \bar{f}_\psi\right]_{(\gamma=\gamma_{lim}+p)} = 0$ | (continuité de $\boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref}$) |

**Solution :** on trouve les $g^{(\bullet)}$ en fonction des expériences.
On en déduit $\bar{f}_\psi$ puis $\bar{f}_s$, $\bar{f}_e$ et $\boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref}$. (pdf, section 5.4)
On trouve aussi des relations nécessaires entre les mesures :

$$\tau^{(3)}_{exp}(T,K_v,\gamma) = \tau^{(5)}_{exp}(T,K_v,\gamma,0)$$

# Construction d'une énergie libre (2/4)



## Fonctions d'état :

$$\bar{f}_\psi = g^{(1)}(T) + g^{(2)}(T,K_v) + g^{(3)}(T,K_v,\gamma_{lim}) + g^{(4)}(T,K_v,\gamma_{lim}+p,p) + g^{(5)}(T,K_v,\gamma,p)$$

$$\bar{f}_s = -\partial_T \bar{f}_\psi \;;\; \bar{f}_e = \bar{f}_\psi + T\bar{f}_s \;;\; \boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref} = \frac{\rho_0}{K_v}\left(\partial_{K_v}\bar{f}_\psi\, \boldsymbol{S}_{K_v} + \partial_\gamma \bar{f}_\psi\, \boldsymbol{S}_\gamma\right)$$ (fonctions des $g^{(\bullet)}$)

## Équations différentielles déterminant les $g^{(\bullet)}$ : (avec $D=0$)

| | | |
|---|---|---|
| $\mathscr{C}^{(1)}$ : | $Q^{(1)}_{exp}(T) = \bar{f}_e(T,1,0,0)$ | (conservation de l'énergie, J.kg$^{-1}$) |
| $\mathscr{C}^{(2)}$ : | $\sigma^{(2)}_{exp}(T,K_v) = \left[\frac{1}{3}\,\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref}\right]_{(\gamma=0,p=0)}$ | (contrainte moyenne) |
| $\mathscr{C}^{(3)}$ : | $\tau^{(3)}_{exp}(T,K_v,\gamma_{lim}) = \left[\boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref}{}^{1}{}_{2}\right]_{(\gamma=\gamma_{lim},p=0)}$ | (glissement dans le plan $(1,2)$, $\gamma : 0 \to \gamma_{lim}$) |
| $\mathscr{C}^{(4)}$ : | $\tau^{(4)}_{exp}(T,K_v,p) = \left[\boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref}{}^{1}{}_{2}\right]_{(\gamma=\gamma_{lim}+p)}$ | (glissement dans le plan $(1,2)$, $\gamma=\gamma_{lim}+p$) |
| $\mathscr{C}^{(5)}$ : | $\tau^{(5)}_{exp}(T,K_v,\gamma,p) = \boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref}{}^{1}{}_{2}$ | (glissement dans le plan $(1,2)$, $\gamma<\gamma_{lim}+p$) |
| $\bar{f}_\psi$ : | $\left[\partial_p \bar{f}_\psi\right]_{(\gamma=\gamma_{lim}+p)} = 0$ | (continuité de $\boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref}$) |

**Solution :** on trouve les $g^{(\bullet)}$ en fonction des expériences.
On en déduit $\bar{f}_\psi$ puis $\bar{f}_s$, $\bar{f}_e$ et $\boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref}$. (pdf, section 5.4)
On trouve aussi des relations nécessaires entre les mesures :

$$\tau^{(3)}_{exp}(T,K_v,\gamma) = \tau^{(5)}_{exp}(T,K_v,\gamma,0) \quad \text{et} \quad \tau^{(4)}_{exp}(T,K_v,p) = \tau^{(5)}_{exp}(T,K_v,p+\gamma_{lim},p)$$

# Construction d'une énergie libre (3/4)

# Construction d'une énergie libre (3/4)

## Une idéalisation de $\tau_{exp}^{(5)}$ :

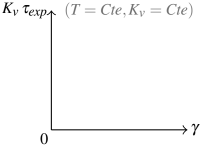
# Construction d'une énergie libre (3/4)

## Une idéalisation de $\tau_{exp}^{(5)}$ : (détails dans la section 5.6 du pdf)

# Construction d'une énergie libre (3/4)

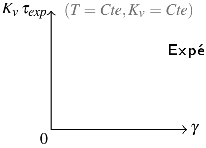
## Une idéalisation de $\tau_{exp}^{(5)}$ :

(détails dans la section 5.6 du pdf)



# Construction d'une énergie libre (3/4)

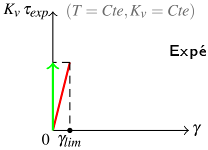
## Une idéalisation de $\tau_{exp}^{(5)}$ : (détails dans la section 5.6 du pdf)




Expérience idéalisée :

# Construction d'une énergie libre (3/4)

## Une idéalisation de $\tau_{exp}^{(5)}$ : (détails dans la section 5.6 du pdf)

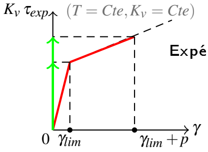



Expérience idéalisée : $\tau_{exp}^{(5)} = \frac{1}{K_v}\left(\mu_0\,\gamma_{lim} + \right.$

# Construction d'une énergie libre (3/4)



## Une idéalisation de $\tau_{exp}^{(5)}$ : (détails dans la section 5.6 du pdf)

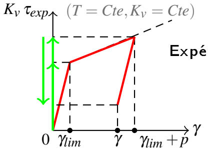



Expérience idéalisée : $\tau_{exp}^{(5)} = \frac{1}{K_v}\left(\mu_0\,\gamma_{lim} + k_0\,p\right.$

# Construction d'une énergie libre (3/4)



## Une idéalisation de $\tau^{(5)}_{exp}$ : (détails dans la section 5.6 du pdf)

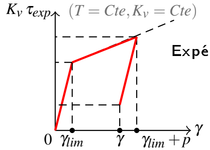



Expérience idéalisée : $\tau^{(5)}_{exp} = \frac{1}{K_v}\left(\mu_0\,\gamma_{lim} + k_0\,p - \mu_0\,(p + \gamma_{lim} - \gamma)\right)$

# Construction d'une énergie libre (3/4)



## Une idéalisation de $\tau_{exp}^{(5)}$ : (détails dans la section 5.6 du pdf)



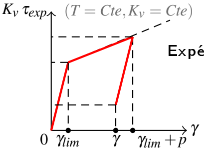

Expérience idéalisée : $\tau_{exp}^{(5)} = \frac{1}{K_v}\left(\mu_0\,\gamma_{lim} + k_0\,p - \mu_0\,(p + \gamma_{lim} - \gamma)\right)$

$$\tau_{exp}^{(5)}(T, K_v, \gamma, p) = \frac{\mu_0\,(\gamma - p) + k_0\,p}{K_v}$$

# Construction d'une énergie libre (3/4)



## Une idéalisation de $\tau_{exp}^{(5)}$ : (détails dans la section 5.6 du pdf)




Expérience idéalisée : $\tau_{exp}^{(5)} = \frac{1}{K_v}\left(\mu_0\,\gamma_{lim} + k_0\,p - \mu_0\,(p + \gamma_{lim} - \gamma)\right)$

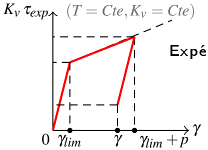
$$\tau_{exp}^{(5)}(T, K_v, \gamma, p) = \frac{\mu_0\,(\gamma - p) + k_0\,p}{K_v}$$

## Une idéalisation du chemin $\mathscr{C}^{(1')}$ : (dilat./contr. thermique libre)

# Construction d'une énergie libre (3/4)



## Une idéalisation de $\tau_{exp}^{(5)}$ : (détails dans la section 5.6 du pdf)




Expérience idéalisée : $\tau_{exp}^{(5)} = \frac{1}{K_v}\left(\mu_0\,\gamma_{lim} + k_0\,p - \mu_0\,(p+\gamma_{lim}-\gamma)\right)$

$$\tau_{exp}^{(5)}(T, K_v, \gamma, p) = \frac{\mu_0\,(\gamma - p) + k_0\,p}{K_v}$$

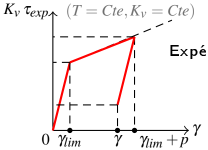
## Une idéalisation du chemin $\mathscr{C}^{(1')}$ : (dilat./contr. thermique libre)

$Q_{exp}^{(1')}(T) = C_p\,(T - T_0)$ ($C_p$ : capacité thermique à contrainte nulle)

# Construction d'une énergie libre (3/4)



## Une idéalisation de $\tau_{exp}^{(5)}$ : (détails dans la section 5.6 du pdf)




Expérience idéalisée : $\tau_{exp}^{(5)} = \frac{1}{K_v}\left(\mu_0\,\gamma_{lim} + k_0\,p - \mu_0\,(p + \gamma_{lim} - \gamma)\right)$

$$\tau_{exp}^{(5)}(T, K_v, \gamma, p) = \frac{\mu_0\,(\gamma - p) + k_0\,p}{K_v}$$

## Une idéalisation du chemin $\mathscr{C}^{(1')}$ : (dilat./contr. thermique libre)

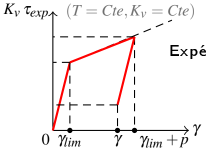
$Q_{exp}^{(1')}(T) = C_p\,(T - T_0)$ ($C_p$ : capacité thermique à contrainte nulle)

$K_{v\,exp}^{(1')} = 1 + \beta_0\,(T - T_0)$ ($\beta_0$ : coef. dilatation thermique à contrainte nulle)

# Construction d'une énergie libre (3/4)



## Une idéalisation de $\tau_{exp}^{(5)}$ : (détails dans la section 5.6 du pdf)




Expérience idéalisée : $\tau_{exp}^{(5)} = \frac{1}{K_v}\left(\mu_0\,\gamma_{lim} + k_0\,p - \mu_0\,(p + \gamma_{lim} - \gamma)\right)$

$$\tau_{exp}^{(5)}(T, K_v, \gamma, p) = \frac{\mu_0\,(\gamma - p) + k_0\,p}{K_v}$$

## Une idéalisation du chemin $\mathscr{C}^{(1')}$ : (dilat./contr. thermique libre)

$Q_{exp}^{(1')}(T) = C_p\,(T - T_0)$ ($C_p$ : capacité thermique à contrainte nulle)

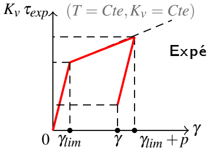
$K_{v\,exp}^{(1')} = 1 + \beta_0\,(T - T_0)$ ($\beta_0$ : coef. dilatation thermique à contrainte nulle)

## Une idéalisation de $\sigma_{exp}^{(2)}$ :

# Construction d'une énergie libre (3/4)



## Une idéalisation de $\tau_{exp}^{(5)}$ : (détails dans la section 5.6 du pdf)




Expérience idéalisée : $\tau_{exp}^{(5)} = \frac{1}{K_v}\left(\mu_0\,\gamma_{lim} + k_0\,p - \mu_0\,(p + \gamma_{lim} - \gamma)\right)$

$$\tau_{exp}^{(5)}(T, K_v, \gamma, p) = \frac{\mu_0\,(\gamma - p) + k_0\,p}{K_v}$$

## Une idéalisation du chemin $\mathscr{C}^{(1')}$ : (dilat./contr. thermique libre)

$Q_{exp}^{(1')}(T) = C_p\,(T - T_0)$ ($C_p$ : capacité thermique à contrainte nulle)

$K_{v\,exp}^{(1')} = 1 + \beta_0\,(T - T_0)$ ($\beta_0$ : coef. dilatation thermique à contrainte nulle)

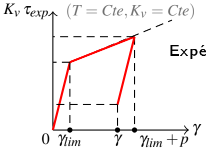
## Une idéalisation de $\sigma_{exp}^{(2)}$ :

$$\sigma_{exp}^{(2)}(T, K_v) = -\xi_0\,\ln K_{v\,exp}^{(1')} + \xi_0\,\ln K_v$$

# Construction d'une énergie libre (3/4)



## Une idéalisation de $\tau_{exp}^{(5)}$ : (détails dans la section 5.6 du pdf)




Expérience idéalisée : $\tau_{exp}^{(5)} = \frac{1}{K_v}\left(\mu_0\,\gamma_{lim} + k_0\,p - \mu_0\,(p+\gamma_{lim}-\gamma)\right)$

$$\tau_{exp}^{(5)}(T,K_v,\gamma,p) = \frac{\mu_0\,(\gamma-p)+k_0\,p}{K_v}$$

## Une idéalisation du chemin $\mathscr{C}^{(1')}$ : (dilat./contr. thermique libre)

$Q_{exp}^{(1')}(T) = C_p\,(T-T_0)$ ($C_p$ : capacité thermique à contrainte nulle)

$K_{v\,exp}^{(1')} = 1+\beta_0\,(T-T_0)$ ($\beta_0$ : coef. dilatation thermique à contrainte nulle)

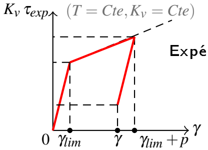
## Une idéalisation de $\sigma_{exp}^{(2)}$ :

$$\sigma_{exp}^{(2)}(T,K_v) = -\xi_0\,\ln K_{v\,exp}^{(1')} + \xi_0\,\ln K_v \;= \xi_0\,\ln \frac{K_v}{1+\beta_0\,(T-T_0)}$$

# Construction d'une énergie libre (3/4)



## Une idéalisation de $\tau_{exp}^{(5)}$ : (détails dans la section 5.6 du pdf)




Expérience idéalisée : $\tau_{exp}^{(5)} = \frac{1}{K_v}\left(\mu_0\,\gamma_{lim} + k_0\,p - \mu_0\,(p + \gamma_{lim} - \gamma)\right)$

$$\tau_{exp}^{(5)}(T, K_v, \gamma, p) = \frac{\mu_0\,(\gamma - p) + k_0\,p}{K_v}$$

## Une idéalisation du chemin $\mathscr{C}^{(1')}$ : (dilat./contr. thermique libre)

$Q_{exp}^{(1')}(T) = C_p\,(T - T_0)$ ($C_p$ : capacité thermique à contrainte nulle)

$K_{v\,exp}^{(1')} = 1 + \beta_0\,(T - T_0)$ ($\beta_0$ : coef. dilatation thermique à contrainte nulle)

## Une idéalisation de $\sigma_{exp}^{(2)}$ :

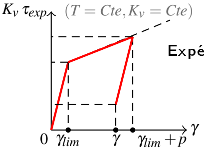
$$\sigma_{exp}^{(2)}(T, K_v) = -\xi_0\,\ln K_{v\,exp}^{(1')} + \xi_0\,\ln K_v \;= \xi_0\,\ln \frac{K_v}{1+\beta_0\,(T-T_0)}$$

## Contrainte de référence avec ces idéalisations :

# Construction d'une énergie libre (3/4)



## Une idéalisation de $\tau_{exp}^{(5)}$ : (détails dans la section 5.6 du pdf)




Expérience idéalisée : $\tau_{exp}^{(5)} = \frac{1}{K_v}\left(\mu_0\,\gamma_{lim} + k_0\,p - \mu_0\,(p+\gamma_{lim}-\gamma)\right)$

$$\tau_{exp}^{(5)}(T, K_v, \gamma, p) = \frac{\mu_0\,(\gamma-p)+k_0\,p}{K_v}$$

## Une idéalisation du chemin $\mathscr{C}^{(1')}$ : (dilat./contr. thermique libre)

$Q_{exp}^{(1')}(T) = C_p\,(T-T_0)$ ($C_p$ : capacité thermique à contrainte nulle)

$K_{v\,exp}^{(1')} = 1+\beta_0\,(T-T_0)$ ($\beta_0$ : coef. dilatation thermique à contrainte nulle)

## Une idéalisation de $\sigma_{exp}^{(2)}$ :

$$\sigma_{exp}^{(2)}(T, K_v) = -\xi_0\,\ln K_{v\,exp}^{(1')} + \xi_0\,\ln K_v \;= \xi_0\,\ln \frac{K_v}{1+\beta_0\,(T-T_0)}$$

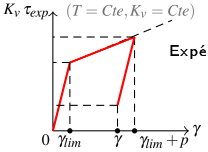
## Contrainte de référence avec ces idéalisations :

$$\boldsymbol{\sigma}_{ref}^{(p)} = \xi_0\,\ln\frac{K_v}{1+\beta_0\,(T-T_0)}\,\boldsymbol{G} + \frac{\mu_0\,(\gamma-p)+k_0\,p}{K_v}\,\boldsymbol{S}_\gamma$$

# Construction d'une énergie libre (3/4)



## Une idéalisation de $\tau_{exp}^{(5)}$ : (détails dans la section 5.6 du pdf)




Expérience idéalisée : $\tau_{exp}^{(5)} = \frac{1}{K_v}\left(\mu_0\,\gamma_{lim} + k_0\,p - \mu_0\,(p + \gamma_{lim} - \gamma)\right)$

$$\tau_{exp}^{(5)}(T, K_v, \gamma, p) = \frac{\mu_0\,(\gamma - p) + k_0\,p}{K_v}$$

## Une idéalisation du chemin $\mathscr{C}^{(1')}$ : (dilat./contr. thermique libre)

$Q_{exp}^{(1')}(T) = C_p\,(T - T_0)$ ($C_p$ : capacité thermique à contrainte nulle)

$K_{v\,exp}^{(1')} = 1 + \beta_0\,(T - T_0)$ ($\beta_0$ : coef. dilatation thermique à contrainte nulle)

## Une idéalisation de $\sigma_{exp}^{(2)}$ :

$$\sigma_{exp}^{(2)}(T, K_v) = -\xi_0\,\ln K_{v\,exp}^{(1')} + \xi_0\,\ln K_v = \xi_0\,\ln \frac{K_v}{1+\beta_0\,(T-T_0)}$$

## Contrainte de référence avec ces idéalisations :

$$\boldsymbol{\sigma}_{ref}^{(p)} = \xi_0\,\ln \frac{K_v}{1 + \beta_0\,(T - T_0)}\,\boldsymbol{G} + \frac{\mu_0\,(\gamma - p) + k_0\,p}{K_v}\,\boldsymbol{S}_\gamma$$

(tous les autres résultats sont dans le pdf)

# Construction d'une énergie libre (4/4)

# Construction d'une énergie libre (4/4)



## Résumé de la démarche de construction de $\bar{f}_\psi$ :

# Construction d'une énergie libre (4/4)



## Résumé de la démarche de construction de $\bar{f}_\psi$ :

1. Construire un chemin conduisant à un état admissible quelconque.

# Construction d'une énergie libre (4/4)



## Résumé de la démarche de construction de $\bar{f}_\psi$ :

1. Construire un chemin conduisant à un état admissible quelconque.
2. L'énergie libre massique de Helmholtz de l'état final est la somme de ses variations dans chaque chemin élémentaire : $\bar{f}_\psi = \sum g^{(\bullet)}$.

# Construction d'une énergie libre (4/4)



## Résumé de la démarche de construction de $\bar{f}_\psi$ :

1. Construire un chemin conduisant à un état admissible quelconque.
2. L'énergie libre massique de Helmholtz de l'état final est la somme de ses variations dans chaque chemin élémentaire : $\bar{f}_\psi = \sum g^{(\bullet)}$.
   Les autres fonctions d'état $\bar{f}_s$, $\bar{f}_e$ et $\boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref}$ s'en déduisent.

# Construction d'une énergie libre (4/4)



## Résumé de la démarche de construction de $\bar{f}_\psi$ :

1. Construire un chemin conduisant à un état admissible quelconque.
2. L'énergie libre massique de Helmholtz de l'état final est la somme de ses variations dans chaque chemin élémentaire : $\bar{f}_\psi = \sum g^{(\bullet)}$.

   Les autres fonctions d'état $\bar{f}_s$, $\bar{f}_e$ et $\boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref}$ s'en déduisent.
3. Pour chaque chemin élémentaire, écrire l'équation qui le régit en fonction de mesures $Z^{(\bullet)}_{exp}$ (chaleur ou contraintes), dans des expériences idéales

# Construction d'une énergie libre (4/4)



## Résumé de la démarche de construction de $\bar{f}_\psi$ :

1. Construire un chemin conduisant à un état admissible quelconque.
2. L'énergie libre massique de Helmholtz de l'état final est la somme de ses variations dans chaque chemin élémentaire : $\bar{f}_\psi = \sum g^{(\bullet)}$.
   Les autres fonctions d'état $\bar{f}_s$, $\bar{f}_e$ et $\boldsymbol{\sigma}_{ref}^{(p)}$ s'en déduisent.
3. Pour chaque chemin élémentaire, écrire l'équation qui le régit en fonction de mesures $Z_{exp}^{(\bullet)}$ (chaleur ou contraintes), dans des expériences idéales (vitesses nulles,

# Construction d'une énergie libre (4/4)



## Résumé de la démarche de construction de $\bar{f}_\psi$ :

1. Construire un chemin conduisant à un état admissible quelconque.
2. L'énergie libre massique de Helmholtz de l'état final est la somme de ses variations dans chaque chemin élémentaire : $\bar{f}_\psi = \sum g^{(\bullet)}$.
   Les autres fonctions d'état $\bar{f}_s$, $\bar{f}_e$ et $\boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref}$ s'en déduisent.
3. Pour chaque chemin élémentaire, écrire l'équation qui le régit en fonction de mesures $Z^{(\bullet)}_{exp}$ (chaleur ou contraintes), dans des expériences idéales (vitesses nulles, champs uniformes,

# Construction d'une énergie libre (4/4)



## Résumé de la démarche de construction de $\bar{f}_\psi$ :

1. Construire un chemin conduisant à un état admissible quelconque.
2. L'énergie libre massique de Helmholtz de l'état final est la somme de ses variations dans chaque chemin élémentaire : $\bar{f}_\psi = \sum g^{(\bullet)}$.
   Les autres fonctions d'état $\bar{f}_s$, $\bar{f}_e$ et $\boldsymbol{\sigma}_{ref}^{(p)}$ s'en déduisent.
3. Pour chaque chemin élémentaire, écrire l'équation qui le régit en fonction de mesures $Z_{exp}^{(\bullet)}$ (chaleur ou contraintes), dans des expériences idéales (vitesses nulles, champs uniformes, pesanteur négligeable).

# Construction d'une énergie libre (4/4)



## Résumé de la démarche de construction de $\bar{f}_\psi$ :

1. Construire un chemin conduisant à un état admissible quelconque.
2. L'énergie libre massique de Helmholtz de l'état final est la somme de ses variations dans chaque chemin élémentaire : $\bar{f}_\psi = \sum g^{(\bullet)}$.

   Les autres fonctions d'état $\bar{f}_s$, $\bar{f}_e$ et $\boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref}$ s'en déduisent.
3. Pour chaque chemin élémentaire, écrire l'équation qui le régit en fonction de mesures $Z^{(\bullet)}_{exp}$ (chaleur ou contraintes), dans des expériences idéales (vitesses nulles, champs uniformes, pesanteur négligeable).

   Les expériences idéales peuvent être approchées par des expériences réelles,

# Construction d'une énergie libre (4/4)



## Résumé de la démarche de construction de $\bar{f}_\psi$ :

1. Construire un chemin conduisant à un état admissible quelconque.
2. L'énergie libre massique de Helmholtz de l'état final est la somme de ses variations dans chaque chemin élémentaire : $\bar{f}_\psi = \sum g^{(\bullet)}$.

   Les autres fonctions d'état $\bar{f}_s$, $\bar{f}_e$ et $\boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref}$ s'en déduisent.
3. Pour chaque chemin élémentaire, écrire l'équation qui le régit en fonction de mesures $Z^{(\bullet)}_{exp}$ (chaleur ou contraintes), dans des expériences idéales (vitesses nulles, champs uniformes, pesanteur négligeable).

   Les expériences idéales peuvent être approchées par des expériences réelles, ou idéalisées par des expressions physiquement sensées.

# Construction d'une énergie libre (4/4)



## Résumé de la démarche de construction de $\bar{f}_\psi$ :

1. Construire un chemin conduisant à un état admissible quelconque.
2. L'énergie libre massique de Helmholtz de l'état final est la somme de ses variations dans chaque chemin élémentaire : $\bar{f}_\psi = \sum g^{(\bullet)}$.

   Les autres fonctions d'état $\bar{f}_s$, $\bar{f}_e$ et $\boldsymbol{\sigma}_{ref}^{(p)}$ s'en déduisent.
3. Pour chaque chemin élémentaire, écrire l'équation qui le régit en fonction de mesures $Z_{exp}^{(\bullet)}$ (chaleur ou contraintes), dans des expériences idéales (vitesses nulles, champs uniformes, pesanteur négligeable).

   Les expériences idéales peuvent être approchées par des expériences réelles, ou idéalisées par des expressions physiquement sensées.
4. On obtient l'expression de $\bar{f}_\psi$ en fonction des expériences $Z_{exp}^{(\bullet)}$

# Construction d'une énergie libre (4/4)



## Résumé de la démarche de construction de $\bar{f}_\psi$ :

1. Construire un chemin conduisant à un état admissible quelconque.
2. L'énergie libre massique de Helmholtz de l'état final est la somme de ses variations dans chaque chemin élémentaire : $\bar{f}_\psi = \sum g^{(\bullet)}$.

   Les autres fonctions d'état $\bar{f}_s$, $\bar{f}_e$ et $\boldsymbol{\sigma}_{ref}^{(p)}$ s'en déduisent.
3. Pour chaque chemin élémentaire, écrire l'équation qui le régit en fonction de mesures $Z_{exp}^{(\bullet)}$ (chaleur ou contraintes), dans des expériences idéales (vitesses nulles, champs uniformes, pesanteur négligeable).

   Les expériences idéales peuvent être approchées par des expériences réelles, ou idéalisées par des expressions physiquement sensées.
4. On obtient l'expression de $\bar{f}_\psi$ en fonction des expériences $Z_{exp}^{(\bullet)}$ et on en déduit les autres fonctions d'état $\bar{f}_s$, $\bar{f}_e$ et $\boldsymbol{\sigma}_{ref}^{(p)}$.

# Construction d'une énergie libre (4/4)



## Résumé de la démarche de construction de $\overline{f}_\psi$ :

1. Construire un chemin conduisant à un état admissible quelconque.
2. L'énergie libre massique de Helmholtz de l'état final est la somme de ses variations dans chaque chemin élémentaire : $\overline{f}_\psi = \sum g^{(\bullet)}$.
   Les autres fonctions d'état $\overline{f}_s$, $\overline{f}_e$ et $\boldsymbol{\sigma}_{ref}^{(p)}$ s'en déduisent.
3. Pour chaque chemin élémentaire, écrire l'équation qui le régit en fonction de mesures $Z_{exp}^{(\bullet)}$ (chaleur ou contraintes), dans des expériences idéales (vitesses nulles, champs uniformes, pesanteur négligeable).
   Les expériences idéales peuvent être approchées par des expériences réelles, ou idéalisées par des expressions physiquement sensées.
4. On obtient l'expression de $\overline{f}_\psi$ en fonction des expériences $Z_{exp}^{(\bullet)}$ et on en déduit les autres fonctions d'état $\overline{f}_s$, $\overline{f}_e$ et $\boldsymbol{\sigma}_{ref}^{(p)}$.
5. Les contraintes dissipatives $\boldsymbol{\sigma}_d$ sont déterminées par des expériences à vitesse de déformation contrôlée :

# Construction d'une énergie libre (4/4)



## Résumé de la démarche de construction de $\bar{f}_\psi$ :

1. Construire un chemin conduisant à un état admissible quelconque.
2. L'énergie libre massique de Helmholtz de l'état final est la somme de ses variations dans chaque chemin élémentaire : $\bar{f}_\psi = \sum g^{(\bullet)}$.

   Les autres fonctions d'état $\bar{f}_s$, $\bar{f}_e$ et $\boldsymbol{\sigma}_{ref}^{(p)}$ s'en déduisent.
3. Pour chaque chemin élémentaire, écrire l'équation qui le régit en fonction de mesures $Z_{exp}^{(\bullet)}$ (chaleur ou contraintes), dans des expériences idéales (vitesses nulles, champs uniformes, pesanteur négligeable).

   Les expériences idéales peuvent être approchées par des expériences réelles, ou idéalisées par des expressions physiquement sensées.
4. On obtient l'expression de $\bar{f}_\psi$ en fonction des expériences $Z_{exp}^{(\bullet)}$ et on en déduit les autres fonctions d'état $\bar{f}_s$, $\bar{f}_e$ et $\boldsymbol{\sigma}_{ref}^{(p)}$.
5. Les contraintes dissipatives $\boldsymbol{\sigma}_d$ sont déterminées par des expériences à vitesse de déformation contrôlée : $\boldsymbol{\sigma}_d = \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_{ref}^{(p)}$.

# Variantes possibles

# Variantes possibles



- Variables d'état cinématiques plus complètes :

# Variantes possibles

- Variables d'état cinématiques plus complètes :
  déformation à 3 invariants, anisotropies...

# Variantes possibles

- Variables d'état cinématiques plus complètes :
  déformation à 3 invariants, anisotropies...
- La limite élastique dépend de la température :

# Variantes possibles

- Variables d'état cinématiques plus complètes : déformation à 3 invariants, anisotropies...
- La limite élastique dépend de la température : $\gamma_{lim}(T)$ ou $\delta_{lim}(T)$ ;

# Variantes possibles

- Variables d'état cinématiques plus complètes : déformation à 3 invariants, anisotropies...
- La limite élastique dépend de la température : $\gamma_{lim}(T)$ ou $\delta_{lim}(T)$ ; le modèle est un peu plus compliqué car la relation de Helmholtz est modifiée.

# Variantes possibles

- Variables d'état cinématiques plus complètes :
  déformation à 3 invariants, anisotropies...
- La limite élastique dépend de la température :
  $\gamma_{lim}(T)$ ou $\delta_{lim}(T)$ ; le modèle est un peu plus compliqué car la relation de Helmholtz est modifiée. (exercice)

# Variantes possibles

- Variables d'état cinématiques plus complètes :
  déformation à 3 invariants, anisotropies...
- La limite élastique dépend de la température :
  $\gamma_{lim}(T)$ ou $\delta_{lim}(T)$ ; le modèle est un peu plus compliqué car la relation de Helmholtz est modifiée. (exercice)
- Plastification immédiate :

# Variantes possibles

- Variables d'état cinématiques plus complètes : déformation à 3 invariants, anisotropies...
- La limite élastique dépend de la température : $\gamma_{lim}(T)$ ou $\delta_{lim}(T)$ ; le modèle est un peu plus compliqué car la relation de Helmholtz est modifiée. (exercice)
- Plastification immédiate : on pose $\delta_{lim} = 1 \Leftrightarrow \gamma_{lim} = 0$.

# Variantes possibles

- Variables d'état cinématiques plus complètes :
  déformation à 3 invariants, anisotropies...
- La limite élastique dépend de la température :
  $\gamma_{lim}(T)$ ou $\delta_{lim}(T)$ ; le modèle est un peu plus compliqué car la relation de Helmholtz est modifiée. (exercice)
- Plastification immédiate : on pose $\delta_{lim} = 1 \Leftrightarrow \gamma_{lim} = 0$.
  Modélisation de matériaux comme la plasticine.

# Variantes possibles



- Variables d'état cinématiques plus complètes :
  déformation à 3 invariants, anisotropies...
- La limite élastique dépend de la température :
  $\gamma_{lim}(T)$ ou $\delta_{lim}(T)$ ; le modèle est un peu plus compliqué car la relation de Helmholtz est modifiée. (exercice)
- Plastification immédiate : on pose $\delta_{lim} = 1 \Leftrightarrow \gamma_{lim} = 0$.
  Modélisation de matériaux comme la plasticine.
- Autre expression du critère de limite élastique :

# Variantes possibles

- Variables d'état cinématiques plus complètes :
  déformation à 3 invariants, anisotropies...
- La limite élastique dépend de la température :
  $\gamma_{lim}(T)$ ou $\delta_{lim}(T)$ ; le modèle est un peu plus compliqué car la relation de Helmholtz est modifiée. (exercice)
- Plastification immédiate : on pose $\delta_{lim} = 1 \Leftrightarrow \gamma_{lim} = 0$.
  Modélisation de matériaux comme la plasticine.
- Autre expression du critère de limite élastique :
  $\delta \leq \delta_{lim}$

# Variantes possibles



- Variables d'état cinématiques plus complètes : déformation à 3 invariants, anisotropies...
- La limite élastique dépend de la température : $\gamma_{lim}(T)$ ou $\delta_{lim}(T)$ ; le modèle est un peu plus compliqué car la relation de Helmholtz est modifiée. (exercice)
- Plastification immédiate : on pose $\delta_{lim} = 1 \Leftrightarrow \gamma_{lim} = 0$. Modélisation de matériaux comme la plasticine.
- Autre expression du critère de limite élastique :

$$\delta \leq \delta_{lim} \quad \Leftrightarrow \quad h(\delta) \leq h(\delta_{lim}) \qquad \text{avec } \forall x \geqslant 1,\ h'(x) > 0$$

# Variantes possibles

- Variables d'état cinématiques plus complètes :
  déformation à 3 invariants, anisotropies...
- La limite élastique dépend de la température :
  $\gamma_{lim}(T)$ ou $\delta_{lim}(T)$ ; le modèle est un peu plus compliqué car la relation de Helmholtz est modifiée. (exercice)
- Plastification immédiate : on pose $\delta_{lim} = 1 \Leftrightarrow \gamma_{lim} = 0$.
  Modélisation de matériaux comme la plasticine.
- Autre expression du critère de limite élastique :
  $$\delta \leq \delta_{lim} \quad \Leftrightarrow \quad h(\delta) \leq h(\delta_{lim}) \qquad \text{avec } \forall x \geqslant 1,\ h'(x) > 0$$
  La fonction $h$ permet de moduler la loi d'évolution.

# Variantes possibles



- Variables d'état cinématiques plus complètes :
  déformation à 3 invariants, anisotropies...
- La limite élastique dépend de la température :
  $\gamma_{lim}(T)$ ou $\delta_{lim}(T)$ ; le modèle est un peu plus compliqué car la relation de Helmholtz est modifiée. (exercice)
- Plastification immédiate : on pose $\delta_{lim} = 1 \Leftrightarrow \gamma_{lim} = 0$.
  Modélisation de matériaux comme la plasticine.
- Autre expression du critère de limite élastique :
  $$\delta \leq \delta_{lim} \quad \Leftrightarrow \quad h(\delta) \leq h(\delta_{lim}) \qquad \text{avec } \forall x \geqslant 1,\; h'(x) > 0$$
  La fonction $h$ permet de moduler la loi d'évolution. (exercice)

# Variantes possibles

- Variables d'état cinématiques plus complètes : déformation à 3 invariants, anisotropies...
- La limite élastique dépend de la température : $\gamma_{lim}(T)$ ou $\delta_{lim}(T)$ ; le modèle est un peu plus compliqué car la relation de Helmholtz est modifiée. (exercice)
- Plastification immédiate : on pose $\delta_{lim} = 1 \Leftrightarrow \gamma_{lim} = 0$. Modélisation de matériaux comme la plasticine.
- Autre expression du critère de limite élastique :
  $$\delta \leq \delta_{lim} \quad \Leftrightarrow \quad h(\delta) \leq h(\delta_{lim}) \qquad \text{avec } \forall x \geqslant 1,\; h'(x) > 0$$
  La fonction $h$ permet de moduler la loi d'évolution. (exercice)
- Autre critère de déclenchement de la plastification :

# Variantes possibles



- Variables d'état cinématiques plus complètes : déformation à 3 invariants, anisotropies...
- La limite élastique dépend de la température : $\gamma_{lim}(T)$ ou $\delta_{lim}(T)$ ; le modèle est un peu plus compliqué car la relation de Helmholtz est modifiée. (exercice)
- Plastification immédiate : on pose $\delta_{lim} = 1 \Leftrightarrow \gamma_{lim} = 0$. Modélisation de matériaux comme la plasticine.
- Autre expression du critère de limite élastique :
  $$\delta \leq \delta_{lim} \quad \Leftrightarrow \quad h(\delta) \leq h(\delta_{lim}) \qquad \text{avec } \forall x \geqslant 1,\ h'(x) > 0$$
  La fonction $h$ permet de moduler la loi d'évolution. (exercice)
- Autre critère de déclenchement de la plastification : exemple : limitation de la distorsion angulaire, $\delta^a \leq \delta^a_{lim}$

# Variantes possibles



- Variables d'état cinématiques plus complètes : déformation à 3 invariants, anisotropies...
- La limite élastique dépend de la température : $\gamma_{lim}(T)$ ou $\delta_{lim}(T)$ ; le modèle est un peu plus compliqué car la relation de Helmholtz est modifiée. (exercice)
- Plastification immédiate : on pose $\delta_{lim} = 1 \Leftrightarrow \gamma_{lim} = 0$. Modélisation de matériaux comme la plasticine.
- Autre expression du critère de limite élastique :
  $$\delta \leq \delta_{lim} \quad \Leftrightarrow \quad h(\delta) \leq h(\delta_{lim}) \qquad \text{avec } \forall x \geqslant 1,\ h'(x) > 0$$
  La fonction $h$ permet de moduler la loi d'évolution. (exercice)
- Autre critère de déclenchement de la plastification : exemple : limitation de la distorsion angulaire, $\delta^a \leq \delta^a_{lim}$
- Autre mode de mémorisation du chemin suivi :

# Variantes possibles



- Variables d'état cinématiques plus complètes :
  déformation à 3 invariants, anisotropies...
- La limite élastique dépend de la température :
  $\gamma_{lim}(T)$ ou $\delta_{lim}(T)$ ; le modèle est un peu plus compliqué car la relation de Helmholtz est modifiée. (exercice)
- Plastification immédiate : on pose $\delta_{lim} = 1 \Leftrightarrow \gamma_{lim} = 0$.
  Modélisation de matériaux comme la plasticine.
- Autre expression du critère de limite élastique :
  $$\delta \leq \delta_{lim} \quad \Leftrightarrow \quad h(\delta) \leq h(\delta_{lim}) \qquad \text{avec } \forall x \geqslant 1,\ h'(x) > 0$$
  La fonction $h$ permet de moduler la loi d'évolution. (exercice)
- Autre critère de déclenchement de la plastification :
  exemple : limitation de la distorsion angulaire, $\delta^a \leq \delta^a_{lim}$
- Autre mode de mémorisation du chemin suivi :
  $$p \neq \sup_{\tau \in [t_0\,;t]} \langle h(\delta) - h(\delta_{lim}) \rangle$$

# Variantes possibles



- Variables d'état cinématiques plus complètes :
  déformation à 3 invariants, anisotropies...
- La limite élastique dépend de la température :
  $\gamma_{lim}(T)$ ou $\delta_{lim}(T)$ ; le modèle est un peu plus compliqué car la relation de Helmholtz est modifiée. (exercice)
- Plastification immédiate : on pose $\delta_{lim} = 1 \Leftrightarrow \gamma_{lim} = 0$.
  Modélisation de matériaux comme la plasticine.
- Autre expression du critère de limite élastique :
  $$\delta \leq \delta_{lim} \quad \Leftrightarrow \quad h(\delta) \leq h(\delta_{lim}) \qquad \text{avec } \forall x \geqslant 1,\ h'(x) > 0$$
  La fonction $h$ permet de moduler la loi d'évolution. (exercice)
- Autre critère de déclenchement de la plastification :
  exemple : limitation de la distorsion angulaire, $\delta^a \leq \delta^a_{lim}$
- Autre mode de mémorisation du chemin suivi :
  $$p \neq \sup_{\tau \in [t_0\,;t]} \langle h(\delta) - h(\delta_{lim}) \rangle$$
- Idéalisation différente des expériences.

# Essai de traction isotherme (étude analytique)

# Essai de traction isotherme (étude analytique)

Si on note $e_1$ la direction de traction :

# Essai de traction isotherme (étude analytique)



## Si on note $e_1$ la direction de traction :

$$[\boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref}{}^{\bullet}{}_{\bullet}]_{(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)} = \begin{bmatrix} \sigma^1{}_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

# Essai de traction isotherme (étude analytique)



## Si on note $\boldsymbol{e}_1$ la direction de traction :

$$[\boldsymbol{\sigma}_{ref}^{(p)}{}^{\bullet}{}_{\bullet}]_{(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)} = \begin{bmatrix} \sigma^1{}_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad [\boldsymbol{B}^{\bullet}{}_{\bullet}]_{(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)} = \begin{bmatrix} {\lambda_1}^2 & 0 & 0 \\ 0 & {\lambda_2}^2 & 0 \\ 0 & 0 & {\lambda_2}^2 \end{bmatrix}$$

# Essai de traction isotherme (étude analytique)



## Si on note $\boldsymbol{e}_1$ la direction de traction :

$$[\boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref}{}^{\bullet}{}_{\bullet}]_{(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)} = \begin{bmatrix} \sigma^1{}_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad [\boldsymbol{B}^{\bullet}{}_{\bullet}]_{(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)} = \begin{bmatrix} \lambda_1{}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2{}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2{}^2 \end{bmatrix}$$

Les valeurs des variables d'état cinématiques sont :

# Essai de traction isotherme (étude analytique)



## Si on note $\boldsymbol{e}_1$ la direction de traction :

$$[\boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref}{}^{\bullet}{}_{\bullet}]_{(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)} = \begin{bmatrix} \sigma^1{}_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad [\boldsymbol{B}^{\bullet}{}_{\bullet}]_{(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)} = \begin{bmatrix} {\lambda_1}^2 & 0 & 0 \\ 0 & {\lambda_2}^2 & 0 \\ 0 & 0 & {\lambda_2}^2 \end{bmatrix}$$

Les valeurs des variables d'état cinématiques sont :

$$K_v = \lambda_1 \, {\lambda_2}^2$$

# Essai de traction isotherme (étude analytique)



## Si on note $e_1$ la direction de traction :

$$[\boldsymbol{\sigma}^{(p)\bullet}_{ref\ \bullet}]_{(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)} = \begin{bmatrix} \sigma^1{}_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad [\boldsymbol{B}^\bullet{}_\bullet]_{(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)} = \begin{bmatrix} {\lambda_1}^2 & 0 & 0 \\ 0 & {\lambda_2}^2 & 0 \\ 0 & 0 & {\lambda_2}^2 \end{bmatrix}$$

Les valeurs des variables d'état cinématiques sont :

$$K_v = \lambda_1 \, {\lambda_2}^2 \quad ; \quad \gamma = \sqrt{3}\,\sqrt{\delta^{2/3} - 1}$$

# Essai de traction isotherme (étude analytique)



## Si on note $\boldsymbol{e}_1$ la direction de traction :

$$[\boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref}{}^{\bullet}{}_{\bullet}]_{(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)} = \begin{bmatrix} \sigma^1{}_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad [\boldsymbol{B}^{\bullet}{}_{\bullet}]_{(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)} = \begin{bmatrix} {\lambda_1}^2 & 0 & 0 \\ 0 & {\lambda_2}^2 & 0 \\ 0 & 0 & {\lambda_2}^2 \end{bmatrix}$$

Les valeurs des variables d'état cinématiques sont :

$$K_v = \lambda_1\, {\lambda_2}^2 \quad ; \quad \gamma = \sqrt{3}\,\sqrt{\delta^{2/3} - 1} = \sqrt{\frac{{\lambda_1}^2 + 2\,{\lambda_2}^2}{{\lambda_1}^{2/3}\,{\lambda_2}^{4/3}} - 3}$$

# Essai de traction isotherme (étude analytique)



## Si on note $\boldsymbol{e}_1$ la direction de traction :

$$[\boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref}{}^{\bullet}{}_{\bullet}]_{(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)} = \begin{bmatrix} \sigma^1{}_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad [\boldsymbol{B}^{\bullet}{}_{\bullet}]_{(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)} = \begin{bmatrix} {\lambda_1}^2 & 0 & 0 \\ 0 & {\lambda_2}^2 & 0 \\ 0 & 0 & {\lambda_2}^2 \end{bmatrix}$$

Les valeurs des variables d'état cinématiques sont :

$$K_v = \lambda_1\,{\lambda_2}^2 \quad ; \quad \gamma = \sqrt{3}\sqrt{\delta^{2/3}-1} = \sqrt{\frac{{\lambda_1}^2+2\,{\lambda_2}^2}{{\lambda_1}^{2/3}\,{\lambda_2}^{4/3}} - 3}$$

## Avec le modèle $(T, K_v, \gamma, p)$ idéalisé précédent :

# Essai de traction isotherme (étude analytique)



## Si on note $e_1$ la direction de traction :

$$[\boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref}{}^{\bullet}{}_{\bullet}]_{(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)} = \begin{bmatrix} {\sigma^1}_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad [\boldsymbol{B}^{\bullet}{}_{\bullet}]_{(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)} = \begin{bmatrix} {\lambda_1}^2 & 0 & 0 \\ 0 & {\lambda_2}^2 & 0 \\ 0 & 0 & {\lambda_2}^2 \end{bmatrix}$$

Les valeurs des variables d'état cinématiques sont :

$$K_v = \lambda_1\,{\lambda_2}^2 \quad ; \quad \gamma = \sqrt{3}\,\sqrt{\delta^{2/3}-1} = \sqrt{\frac{{\lambda_1}^2+2\,{\lambda_2}^2}{{\lambda_1}^{2/3}\,{\lambda_2}^{4/3}}-3}$$

## Avec le modèle $(T, K_v, \gamma, p)$ idéalisé précédent :

$${\sigma^1}_1 = f_1(T, \lambda_1, \lambda_2, p) \quad ;$$

# Essai de traction isotherme (étude analytique)



## Si on note $\boldsymbol{e}_1$ la direction de traction :

$$[\boldsymbol{\sigma}_{ref}^{(p)}{}^{\bullet}{}_{\bullet}]_{(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)} = \begin{bmatrix} \sigma^1{}_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad [\boldsymbol{B}^{\bullet}{}_{\bullet}]_{(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)} = \begin{bmatrix} {\lambda_1}^2 & 0 & 0 \\ 0 & {\lambda_2}^2 & 0 \\ 0 & 0 & {\lambda_2}^2 \end{bmatrix}$$

Les valeurs des variables d'état cinématiques sont :

$$K_v = \lambda_1\,{\lambda_2}^2 \quad ; \quad \gamma = \sqrt{3}\,\sqrt{\delta^{2/3}-1} = \sqrt{\frac{{\lambda_1}^2+2\,{\lambda_2}^2}{{\lambda_1}^{2/3}\,{\lambda_2}^{4/3}} - 3}$$

## Avec le modèle $(T, K_v, \gamma, p)$ idéalisé précédent :

$$\sigma^1{}_1 = f_1(T,\lambda_1,\lambda_2,p) \quad ; \quad 0 = f_2(T,\lambda_1,\lambda_2,p)$$

# Essai de traction isotherme (étude analytique)



## Si on note $\boldsymbol{e}_1$ la direction de traction :

$$[\boldsymbol{\sigma}_{ref}^{(p)\bullet}{}_{\bullet}]_{(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)} = \begin{bmatrix} \sigma^1{}_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad [\boldsymbol{B}^{\bullet}{}_{\bullet}]_{(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)} = \begin{bmatrix} {\lambda_1}^2 & 0 & 0 \\ 0 & {\lambda_2}^2 & 0 \\ 0 & 0 & {\lambda_2}^2 \end{bmatrix}$$

Les valeurs des variables d'état cinématiques sont :

$$K_v = \lambda_1\,{\lambda_2}^2 \quad ; \quad \gamma = \sqrt{3}\,\sqrt{\delta^{2/3}-1} = \sqrt{\frac{{\lambda_1}^2+2\,{\lambda_2}^2}{{\lambda_1}^{2/3}\,{\lambda_2}^{4/3}}-3}$$

## Avec le modèle $(T, K_v, \gamma, p)$ idéalisé précédent :

$$\sigma^1{}_1 = f_1(T,\lambda_1,\lambda_2,p) \quad ; \quad 0 = f_2(T,\lambda_1,\lambda_2,p)$$

où $f_1$ et $f_2$ sont des fonctions compliquées.

# Essai de traction isotherme (étude analytique)



## Si on note $\boldsymbol{e}_1$ la direction de traction :

$$[\boldsymbol{\sigma}_{ref}^{(p)\bullet}{}_{\bullet}]_{(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)} = \begin{bmatrix} \sigma^1{}_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad [\boldsymbol{B}^{\bullet}{}_{\bullet}]_{(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)} = \begin{bmatrix} {\lambda_1}^2 & 0 & 0 \\ 0 & {\lambda_2}^2 & 0 \\ 0 & 0 & {\lambda_2}^2 \end{bmatrix}$$

Les valeurs des variables d'état cinématiques sont :

$$K_v = \lambda_1\,{\lambda_2}^2 \quad ; \quad \gamma = \sqrt{3}\,\sqrt{\delta^{2/3}-1} = \sqrt{\frac{{\lambda_1}^2+2\,{\lambda_2}^2}{{\lambda_1}^{2/3}\,{\lambda_2}^{4/3}}-3}$$

## Avec le modèle $(T, K_v, \gamma, p)$ idéalisé précédent :

$$\sigma^1{}_1 = f_1(T,\lambda_1,\lambda_2,p) \quad ; \quad 0 = f_2(T,\lambda_1,\lambda_2,p)$$

où $f_1$ et $f_2$ sont des fonctions compliquées. (voir pdf, fin de l'annexe D)

# Essai de traction isotherme (étude analytique)



## Si on note $\boldsymbol{e}_1$ la direction de traction :

$$[\boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref}{}^{\bullet}{}_{\bullet}]_{(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)} = \begin{bmatrix} \sigma^1{}_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad [\boldsymbol{B}^{\bullet}{}_{\bullet}]_{(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)} = \begin{bmatrix} {\lambda_1}^2 & 0 & 0 \\ 0 & {\lambda_2}^2 & 0 \\ 0 & 0 & {\lambda_2}^2 \end{bmatrix}$$

Les valeurs des variables d'état cinématiques sont :

$$K_v = \lambda_1\,{\lambda_2}^2 \quad ; \quad \gamma = \sqrt{3}\,\sqrt{\delta^{2/3}-1} = \sqrt{\frac{{\lambda_1}^2+2\,{\lambda_2}^2}{{\lambda_1}^{2/3}\,{\lambda_2}^{4/3}}-3}$$

## Avec le modèle $(T,K_v,\gamma,p)$ idéalisé précédent :

$$\sigma^1{}_1 = f_1(T,\lambda_1,\lambda_2,p) \quad ; \quad 0 = f_2(T,\lambda_1,\lambda_2,p)$$

où $f_1$ et $f_2$ sont des fonctions compliquées. (voir pdf, fin de l'annexe D)

Il n'est pas possible d'éliminer $\lambda_2$ pour obtenir l'expression analytique de la « courbe de traction » $\sigma^1{}_1 = g(T,\lambda_1,p)$ !

# Essai de traction isotherme (étude analytique)

Choix de la variable mnésique
Loi d'évolution
Comportement mécanique
Récapitulation
Construction d'une énergie libre
Variantes possibles
Illustrations numériques
Synthèse

## Si on note $\boldsymbol{e}_1$ la direction de traction :

$$[\boldsymbol{\sigma}_{ref}^{(p)\bullet}{}_{\bullet}]_{(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)} = \begin{bmatrix} \sigma^1{}_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad [\boldsymbol{B}^\bullet{}_\bullet]_{(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)} = \begin{bmatrix} \lambda_1{}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2{}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2{}^2 \end{bmatrix}$$

Les valeurs des variables d'état cinématiques sont :

$$K_v = \lambda_1\,\lambda_2{}^2 \quad ; \quad \gamma = \sqrt{3}\,\sqrt{\delta^{2/3}-1} = \sqrt{\frac{\lambda_1{}^2+2\,\lambda_2{}^2}{\lambda_1{}^{2/3}\,\lambda_2{}^{4/3}} - 3}$$

## Avec le modèle $(T, K_v, \gamma, p)$ idéalisé précédent :

$$\sigma^1{}_1 = f_1(T,\lambda_1,\lambda_2,p) \quad ; \quad 0 = f_2(T,\lambda_1,\lambda_2,p)$$

où $f_1$ et $f_2$ sont des fonctions compliquées. (voir pdf, fin de l'annexe D)

Il n'est pas possible d'éliminer $\lambda_2$ pour obtenir l'expression analytique de la « courbe de traction » $\sigma^1{}_1 = g(T,\lambda_1,p)$ !

Mais on peut faire une simulation numérique...

# Simulation numérique d'une traction.

# Simulation numérique d'une traction.

- Logiciel : `Comsol`®

# Simulation numérique d'une traction.

- Logiciel : `Comsol`® (sans physique déclarée)

# Simulation numérique d'une traction.

- Logiciel : Comsol® (sans physique déclarée)
- Matériau :

# Simulation numérique d'une traction.

- Logiciel : Comsol® (sans physique déclarée)
- Matériau : un acier ordinaire

# Simulation numérique d'une traction.

- Logiciel : Comsol® (sans physique déclarée)
- Matériau : un acier ordinaire ($\gamma_{lim} = 4 10^{-3}$, autres données dans le pdf)

# Simulation numérique d'une traction.

- Logiciel : `Comsol`® (sans physique déclarée)
- Matériau : un acier ordinaire ($\gamma_{lim} = 4\,10^{-3}$, autres données dans le pdf)
- Sollicitation :

# Simulation numérique d'une traction.

- Logiciel : Comsol® (sans physique déclarée)
- Matériau : un acier ordinaire ($\gamma_{lim} = 4 10^{-3}$, autres données dans le pdf)
- Sollicitation : déplacement imposé de $0\%$ à $0{,}5\%$ puis retour à $0\%$.

# Simulation numérique d'une traction.

- Logiciel : `Comsol`® (sans physique déclarée)
- Matériau : un acier ordinaire ($\gamma_{lim} = 4 10^{-3}$, autres données dans le pdf)
- Sollicitation : déplacement imposé de 0% à 0,5% puis retour à 0%.

  (isotherme, pas de viscosité, conditions aux limites habituelles en traction)

# Simulation numérique d'une traction.

- Logiciel : Comsol® (sans physique déclarée)
- Matériau : un acier ordinaire ($\gamma_{lim} = 4 10^{-3}$, autres données dans le pdf)
- Sollicitation : déplacement imposé de 0% à 0,5% puis retour à 0%.

  (isotherme, pas de viscosité, conditions aux limites habituelles en traction)
- Résultats :

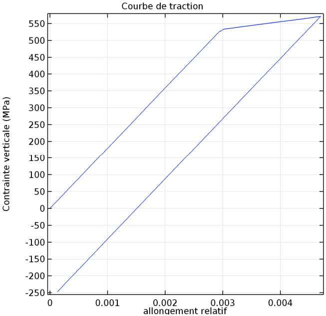
# Simulation numérique d'une traction.

- Logiciel : `Comsol`® (sans physique déclarée)
- Matériau : un acier ordinaire ($\gamma_{lim} = 4 10^{-3}$, autres données dans le pdf)
- Sollicitation : déplacement imposé de 0% à 0,5% puis retour à 0%.
  (isotherme, pas de viscosité, conditions aux limites habituelles en traction)
- Résultats : (on trouve que tous les champs sont uniformes dans l'éprouvette)

# Simulation numérique d'une traction.

- Logiciel : `Comsol`® (sans physique déclarée)
- Matériau : un acier ordinaire ($\gamma_{lim} = 4 10^{-3}$, autres données dans le pdf)
- Sollicitation : déplacement imposé de $0\%$ à $0{,}5\%$ puis retour à $0\%$.

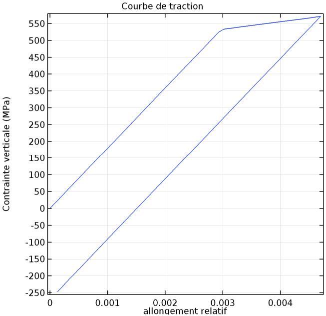
  (isotherme, pas de viscosité, conditions aux limites habituelles en traction)
- Résultats : (on trouve que tous les champs sont uniformes dans l'éprouvette)

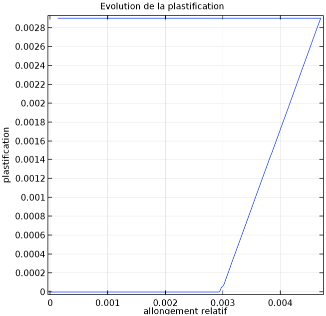


# Simulation numérique d'une traction.

- Logiciel : `Comsol`® (sans physique déclarée)
- Matériau : un acier ordinaire ($\gamma_{lim} = 4\,10^{-3}$, autres données dans le pdf)
- Sollicitation : déplacement imposé de 0% à 0,5% puis retour à 0%.

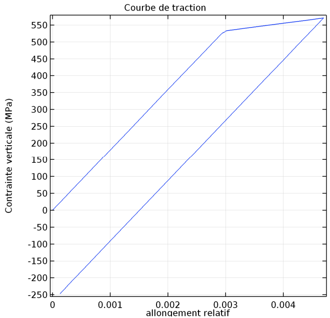
  (isotherme, pas de viscosité, conditions aux limites habituelles en traction)
- Résultats : (on trouve que tous les champs sont uniformes dans l'éprouvette)

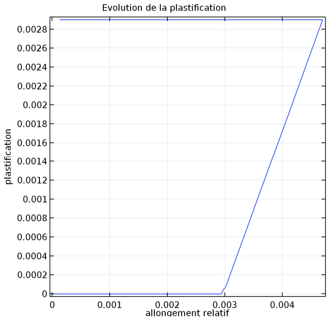


# Simulation numérique d'une traction.

- Logiciel : Comsol® (sans physique déclarée)
- Matériau : un acier ordinaire ($\gamma_{lim} = 4\,10^{-3}$, autres données dans le pdf)
- Sollicitation : déplacement imposé de 0% à 0,5% puis retour à 0%.
  (isotherme, pas de viscosité, conditions aux limites habituelles en traction)
- Résultats : (on trouve que tous les champs sont uniformes dans l'éprouvette)




L'apparente linéarité des courbes est due aux allongements relatifs très petits ($\leq 0{,}5\%$).

# Simulation numérique d'une flexion (1/2)

# Simulation numérique d'une flexion (1/2)

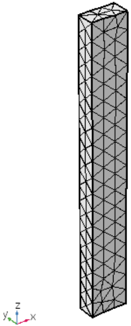
- Matériau : identique au précédent

# Simulation numérique d'une flexion (1/2)

- Matériau : identique au précédent ; éprouvette : $10 \times 10 \times 160$ mm.

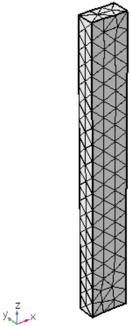
# Simulation numérique d'une flexion (1/2)

- Matériau : identique au précédent ; éprouvette : $10 \times 10 \times 160$ mm.
- Sollicitation : flexion trois points ;



# Simulation numérique d'une flexion (1/2)

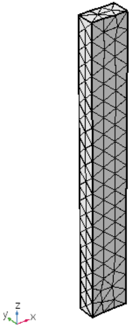
- Matériau : identique au précédent ; éprouvette : $10 \times 10 \times 160$ mm.
- Sollicitation : flexion trois points ;
  plans de symétrie : $z = 0$ et $y = 0$ ;




Choix de la variable mnésique
Loi d'évolution
Comportement mécanique
Récapitulation
Construction d'une énergie libre
Variantes possibles
Illustrations numériques
Synthèse

# Simulation numérique d'une flexion (1/2)

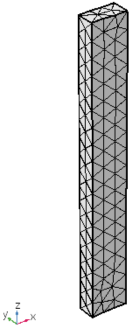
- Matériau : identique au précédent ; éprouvette : $10 \times 10 \times 160$ mm.
- Sollicitation : flexion trois points ;
  plans de symétrie : $z = 0$ et $y = 0$ ;
  appui fixe : $z = 0, x = 10$



# Simulation numérique d'une flexion (1/2)

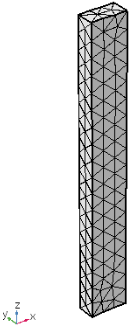


- Matériau : identique au précédent ; éprouvette : $10 \times 10 \times 160$ mm.
- Sollicitation : flexion trois points ;
  plans de symétrie : $z = 0$ et $y = 0$ ;
  appui fixe : $z = 0, x = 10$ ; appui mobile : $x = 0, z = 80$ ;



# Simulation numérique d'une flexion (1/2)

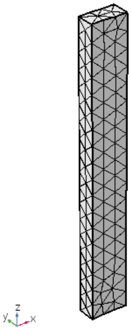
- Matériau : identique au précédent ; éprouvette : $10 \times 10 \times 160$ mm.
- Sollicitation : flexion trois points ;
  plans de symétrie : $z = 0$ et $y = 0$ ;
  appui fixe : $z = 0, x = 10$ ; appui mobile : $x = 0, z = 80$ ;
  déplacement imposé suivant $x$ : $u_{1max} = 5$ mm.



# Simulation numérique d'une flexion (1/2)



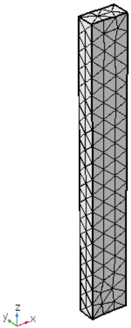
- Matériau : identique au précédent ; éprouvette : $10 \times 10 \times 160$ mm.
- Sollicitation : flexion trois points ;
  plans de symétrie : $z = 0$ et $y = 0$ ;
  appui fixe : $z = 0, x = 10$ ; appui mobile : $x = 0, z = 80$ ;
  déplacement imposé suivant $x$ : $u_{1max} = 5$ mm.
- Résultats :



# Simulation numérique d'une flexion (1/2)



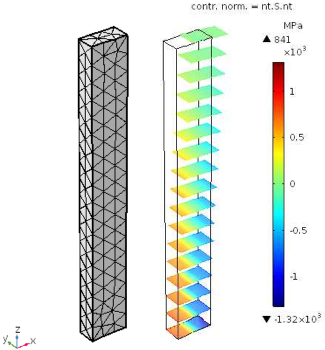
- Matériau : identique au précédent ; éprouvette : $10 \times 10 \times 160$ mm.
- Sollicitation : flexion trois points ;
  plans de symétrie : $z = 0$ et $y = 0$ ;
  appui fixe : $z = 0, x = 10$ ; appui mobile : $x = 0, z = 80$ ;
  déplacement imposé suivant $x$ : $u_{1max} = 5$ mm.
- Résultats : (au déplacement maximal)



# Simulation numérique d'une flexion (1/2)

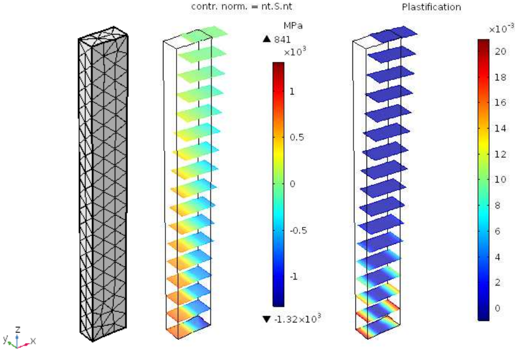


- Matériau : identique au précédent ; éprouvette : $10 \times 10 \times 160$ mm.
- Sollicitation : flexion trois points ;
  plans de symétrie : $z = 0$ et $y = 0$ ;
  appui fixe : $z = 0, x = 10$ ; appui mobile : $x = 0, z = 80$ ;
  déplacement imposé suivant $x$ : $u_{1max} = 5$ mm.
- Résultats : (au déplacement maximal)



# Simulation numérique d'une flexion (1/2)

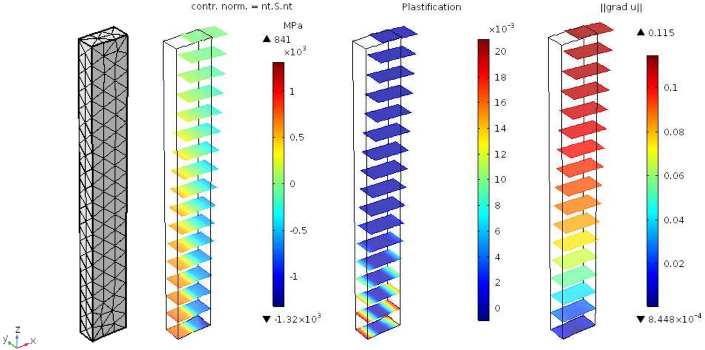
- Matériau : identique au précédent ; éprouvette : $10 \times 10 \times 160$ mm.
- Sollicitation : flexion trois points ;
  plans de symétrie : $z = 0$ et $y = 0$ ;
  appui fixe : $z = 0, x = 10$ ; appui mobile : $x = 0, z = 80$ ;
  déplacement imposé suivant $x$ : $u_{1max} = 5$ mm.
- Résultats : (au déplacement maximal)



# Simulation numérique d'une flexion (1/2)



- Matériau : identique au précédent ; éprouvette : $10 \times 10 \times 160$ mm.
- Sollicitation : flexion trois points ;
  plans de symétrie : $z = 0$ et $y = 0$ ;
  appui fixe : $z = 0, x = 10$ ; appui mobile : $x = 0, z = 80$ ;
  déplacement imposé suivant $x$ : $u_{1max} = 5$ mm.
- Résultats : (au déplacement maximal)



# Simulation numérique d'une flexion (2/2)

# Simulation numérique d'une flexion (2/2)

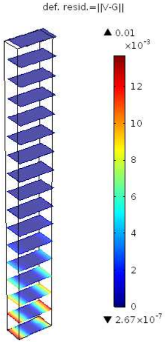


- Résultats : (après le retour « élastique »)

# Simulation numérique d'une flexion (2/2)



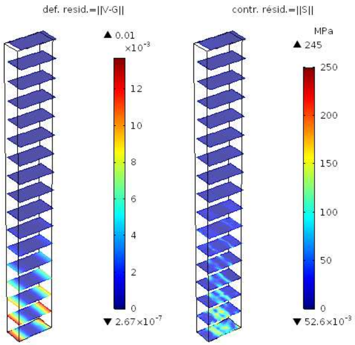
- Résultats : (après le retour « élastique »)



# Simulation numérique d'une flexion (2/2)



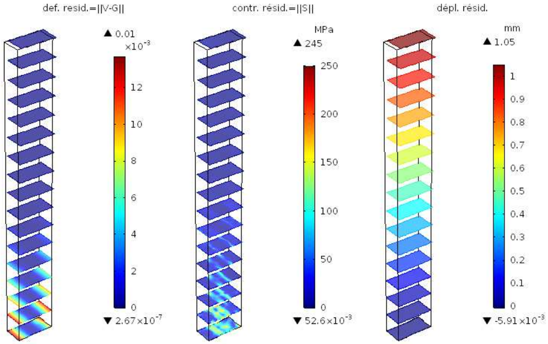
- Résultats : (après le retour « élastique »)



# Simulation numérique d'une flexion (2/2)



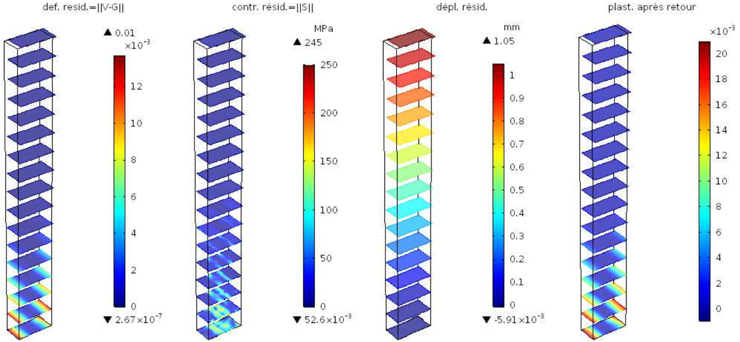
- Résultats : (après le retour « élastique »)



# Simulation numérique d'une flexion (2/2)



- Résultats : (après le retour « élastique »)



# Résumé du modèle de plasticité

# Résumé du modèle de plasticité

Les caractéristiques principales du modèle de plasticité qui a été développé sont :

# Résumé du modèle de plasticité

Les caractéristiques principales du modèle de plasticité qui a été développé sont :

- Seuil de plastification : $\delta \leq \delta_{lim} \Leftrightarrow \gamma \leq \gamma_{lim}$ (critère de « limite élastique »)

# Résumé du modèle de plasticité

Les caractéristiques principales du modèle de plasticité qui a été développé sont :

- Seuil de plastification : $\delta \leq \delta_{lim} \Leftrightarrow \gamma \leq \gamma_{lim}$ (critère de « limite élastique »)
- Une seule variable d'état mnésique : $p = \sup_{\tau \in [t_0\,;t]} \langle \gamma - \gamma_{lim} \rangle$

# Résumé du modèle de plasticité

Les caractéristiques principales du modèle de plasticité qui a été développé sont :

- Seuil de plastification : $\delta \leq \delta_{lim} \Leftrightarrow \gamma \leq \gamma_{lim}$ (critère de « limite élastique »)
- Une seule variable d'état mnésique : $p = \sup_{\tau \in [t_0\,;t]} \langle \gamma - \gamma_{lim} \rangle$
- Variables d'état (solide isotrope) : $\{T, K_v, \gamma, p\}$

# Résumé du modèle de plasticité



Les caractéristiques principales du modèle de plasticité qui a été développé sont :

- Seuil de plastification : $\delta \leq \delta_{lim} \Leftrightarrow \gamma \leq \gamma_{lim}$ (critère de « limite élastique »)
- Une seule variable d'état mnésique : $p = \sup_{\tau \in [t_0\,;t]} \langle \gamma - \gamma_{lim} \rangle$
- Variables d'état (solide isotrope) : $\{T, K_v, \gamma, p\}$
- Il existe un espace des états admissibles : $\gamma \leq \gamma_{lim} + p$

# Résumé du modèle de plasticité



Les caractéristiques principales du modèle de plasticité qui a été développé sont :

- Seuil de plastification : $\delta \leq \delta_{lim} \Leftrightarrow \gamma \leq \gamma_{lim}$ (critère de « limite élastique »)
- Une seule variable d'état mnésique : $p = \sup_{\tau \in [t_0\,;t]} \langle \gamma - \gamma_{lim} \rangle$
- Variables d'état (solide isotrope) : $\{T, K_v, \gamma, p\}$
- Il existe un espace des états admissibles : $\gamma \leq \gamma_{lim} + p$
- Comportement mécanique : $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_{ref}^{(p)} + \boldsymbol{\sigma}_d$

# Résumé du modèle de plasticité



Les caractéristiques principales du modèle de plasticité qui a été développé sont :

- Seuil de plastification : $\delta \leq \delta_{lim} \Leftrightarrow \gamma \leq \gamma_{lim}$ (critère de « limite élastique »)
- Une seule variable d'état mnésique : $p = \sup_{\tau \in [t_0\,;t]} \langle \gamma - \gamma_{lim} \rangle$
- Variables d'état (solide isotrope) : $\{T, K_v, \gamma, p\}$
- Il existe un espace des états admissibles : $\gamma \leq \gamma_{lim} + p$
- Comportement mécanique : $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref} + \boldsymbol{\sigma}_d$
- La contrainte de référence est déterminée par l'énergie libre de Helmholtz :

# Résumé du modèle de plasticité



Les caractéristiques principales du modèle de plasticité qui a été développé sont :

- Seuil de plastification : $\delta \leq \delta_{lim} \Leftrightarrow \gamma \leq \gamma_{lim}$ (critère de « limite élastique »)
- Une seule variable d'état mnésique : $p = \sup_{\tau \in [t_0\,;t]} \langle \gamma - \gamma_{lim} \rangle$
- Variables d'état (solide isotrope) : $\{T, K_v, \gamma, p\}$
- Il existe un espace des états admissibles : $\gamma \leq \gamma_{lim} + p$
- Comportement mécanique : $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref} + \boldsymbol{\sigma}_d$
- La contrainte de référence est déterminée par l'énergie libre de Helmholtz : $\boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref} = \frac{\rho_0}{K_v} \left( \partial_{K_v} \bar{f}_\psi \, \boldsymbol{S}_{K_v} + \partial_\gamma \bar{f}_\psi \, \boldsymbol{S}_\gamma \right)$.

# Résumé du modèle de plasticité

Les caractéristiques principales du modèle de plasticité qui a été développé sont :

- Seuil de plastification : $\delta \leq \delta_{lim} \Leftrightarrow \gamma \leq \gamma_{lim}$ (critère de « limite élastique »)
- Une seule variable d'état mnésique : $p = \sup_{\tau \in [t_0\,;t]} \langle \gamma - \gamma_{lim} \rangle$
- Variables d'état (solide isotrope) : $\{T, K_v, \gamma, p\}$
- Il existe un espace des états admissibles : $\gamma \leq \gamma_{lim} + p$
- Comportement mécanique : $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_{ref}^{(p)} + \boldsymbol{\sigma}_d$
- La contrainte de référence est déterminée par l'énergie libre de Helmholtz : $\boldsymbol{\sigma}_{ref}^{(p)} = \frac{\rho_0}{K_v} \left( \partial_{K_v} \bar{f}_\psi \boldsymbol{S}_{K_v} + \partial_\gamma \bar{f}_\psi \boldsymbol{S}_\gamma \right)$.

  Elle est identifiable par des mesures statiques de chaleur,

# Résumé du modèle de plasticité

Les caractéristiques principales du modèle de plasticité qui a été développé sont :

- Seuil de plastification : $\delta \leq \delta_{lim} \Leftrightarrow \gamma \leq \gamma_{lim}$ (critère de « limite élastique »)
- Une seule variable d'état mnésique : $p = \sup_{\tau \in [t_0\,;t]} \langle \gamma - \gamma_{lim} \rangle$
- Variables d'état (solide isotrope) : $\{T, K_v, \gamma, p\}$
- Il existe un espace des états admissibles : $\gamma \leq \gamma_{lim} + p$
- Comportement mécanique : $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref} + \boldsymbol{\sigma}_d$
- La contrainte de référence est déterminée par l'énergie libre de Helmholtz : $\boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref} = \frac{\rho_0}{K_v} (\partial_{K_v} \bar{f}_\psi \boldsymbol{S}_{K_v} + \partial_\gamma \bar{f}_\psi \boldsymbol{S}_\gamma)$.
  Elle est identifiable par des mesures statiques de chaleur, de contrainte en déformation sphérique

# Résumé du modèle de plasticité

Les caractéristiques principales du modèle de plasticité qui a été développé sont :

- Seuil de plastification : $\delta \leq \delta_{lim} \Leftrightarrow \gamma \leq \gamma_{lim}$ (critère de « limite élastique »)
- Une seule variable d'état mnésique : $p = \sup_{\tau \in [t_0\,;t]} \langle \gamma - \gamma_{lim} \rangle$
- Variables d'état (solide isotrope) : $\{T, K_v, \gamma, p\}$
- Il existe un espace des états admissibles : $\gamma \leq \gamma_{lim} + p$
- Comportement mécanique : $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_{ref}^{(p)} + \boldsymbol{\sigma}_d$
- La contrainte de référence est déterminée par l'énergie libre de Helmholtz : $\boldsymbol{\sigma}_{ref}^{(p)} = \frac{\rho_0}{K_v}\left(\partial_{K_v}\bar{f}_\psi \boldsymbol{S}_{K_v} + \partial_\gamma \bar{f}_\psi \boldsymbol{S}_\gamma\right)$.

  Elle est identifiable par des mesures statiques de chaleur, de contrainte en déformation sphérique et en glissement.

# Résumé du modèle de plasticité

Les caractéristiques principales du modèle de plasticité qui a été développé sont :

- Seuil de plastification : $\delta \leq \delta_{lim} \Leftrightarrow \gamma \leq \gamma_{lim}$ (critère de « limite élastique »)
- Une seule variable d'état mnésique : $p = \sup_{\tau \in [t_0\,;t]} \langle \gamma - \gamma_{lim} \rangle$
- Variables d'état (solide isotrope) : $\{T, K_v, \gamma, p\}$
- Il existe un espace des états admissibles : $\gamma \leq \gamma_{lim} + p$
- Comportement mécanique : $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref} + \boldsymbol{\sigma}_d$
- La contrainte de référence est déterminée par l'énergie libre de Helmholtz : $\boldsymbol{\sigma}^{(p)}_{ref} = \frac{\rho_0}{K_v} (\partial_{K_v} \bar{f}_\psi \boldsymbol{S}_{K_v} + \partial_\gamma \bar{f}_\psi \boldsymbol{S}_\gamma)$.
  Elle est identifiable par des mesures statiques de chaleur, de contrainte en déformation sphérique et en glissement.
- La contrainte dissipative $\boldsymbol{\sigma}_d$ est telle que $\forall \boldsymbol{D},\ \Phi_{int} = \boldsymbol{\sigma}_d : \boldsymbol{D} \geqslant 0$.

# Résumé du modèle de plasticité



Les caractéristiques principales du modèle de plasticité qui a été développé sont :

- Seuil de plastification : $\delta \leq \delta_{lim} \Leftrightarrow \gamma \leq \gamma_{lim}$ (critère de « limite élastique »)
- Une seule variable d'état mnésique : $p = \sup_{\tau \in [t_0\,;t]} \langle \gamma - \gamma_{lim} \rangle$
- Variables d'état (solide isotrope) : $\{T, K_v, \gamma, p\}$
- Il existe un espace des états admissibles : $\gamma \leq \gamma_{lim} + p$
- Comportement mécanique : $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_{ref}^{(p)} + \boldsymbol{\sigma}_d$
- La contrainte de référence est déterminée par l'énergie libre de Helmholtz : $\boldsymbol{\sigma}_{ref}^{(p)} = \frac{\rho_0}{K_v} \left( \partial_{K_v} \overline{f}_\psi \boldsymbol{S}_{K_v} + \partial_\gamma \overline{f}_\psi \boldsymbol{S}_\gamma \right)$.
  Elle est identifiable par des mesures statiques de chaleur, de contrainte en déformation sphérique et en glissement.
- La contrainte dissipative $\boldsymbol{\sigma}_d$ est telle que $\forall \boldsymbol{D},\ \Phi_{int} = \boldsymbol{\sigma}_d : \boldsymbol{D} \geqslant 0$.
- Bien que des essais de traction et de flexion n'aient pas servi à l'identification de l'énergie libre, leur simulation numérique exhibe des comportements mécaniques raisonnables.

Cinquième partie

# Modèles d'endommagement

# Endommagement

# Endommagement

## Objectif microscopique :

# Endommagement

Définition
Endom. par cavitation
Endom. par élongation

## Objectif microscopique :

Se protéger des ruptures de liaisons interatomiques.

# Endommagement

## Objectif microscopique :

Se protéger des ruptures de liaisons interatomiques.

(« affaiblissement » du matériau)

# Endommagement



## Objectif microscopique :

Se protéger des ruptures de liaisons interatomiques.

(« affaiblissement » du matériau)

## Deux idées macroscopiques :

# Endommagement

Définition
Endom. par cavitation
Endom. par élongation

## Objectif microscopique :

Se protéger des ruptures de liaisons interatomiques.
(« affaiblissement » du matériau)

## Deux idées macroscopiques :

1. Limitation de la dilatation volumique :

# Endommagement



## Objectif microscopique :

Se protéger des ruptures de liaisons interatomiques.
(« affaiblissement » du matériau)

## Deux idées macroscopiques :

1. Limitation de la dilatation volumique :
   on suppose qu'à partir d'une certaine dilatation volumique, il se produit des bulles de cavitation.

# Endommagement



## Objectif microscopique :

Se protéger des ruptures de liaisons interatomiques.
(« affaiblissement » du matériau)

## Deux idées macroscopiques :

1. Limitation de la dilatation volumique :
   on suppose qu'à partir d'une certaine dilatation volumique, il se produit des bulles de cavitation.
2. Limitation des élongations :

# Endommagement



## Objectif microscopique :

Se protéger des ruptures de liaisons interatomiques.
(« affaiblissement » du matériau)

## Deux idées macroscopiques :

1. Limitation de la dilatation volumique :
   on suppose qu'à partir d'une certaine dilatation volumique, il se produit des bulles de cavitation.
2. Limitation des élongations :
   on suppose qu'à partir d'une certaine dilatation linéique, il se produit une rupture de liaison.

# Endommagement



## Objectif microscopique :

Se protéger des ruptures de liaisons interatomiques.

(« affaiblissement » du matériau)

## Deux idées macroscopiques :

1. Limitation de la dilatation volumique :
   on suppose qu'à partir d'une certaine dilatation volumique, il se produit des bulles de cavitation.
2. Limitation des élongations :
   on suppose qu'à partir d'une certaine dilatation linéique, il se produit une rupture de liaison.

La dilatation volumique

# Endommagement



## Objectif microscopique :

Se protéger des ruptures de liaisons interatomiques.

(« affaiblissement » du matériau)

## Deux idées macroscopiques :

1. Limitation de la dilatation volumique :
   on suppose qu'à partir d'une certaine dilatation volumique, il se produit des bulles de cavitation.
2. Limitation des élongations :
   on suppose qu'à partir d'une certaine dilatation linéique, il se produit une rupture de liaison.

La dilatation volumique et la dilatation linéique

# Endommagement



## Objectif microscopique :

Se protéger des ruptures de liaisons interatomiques.
(« affaiblissement » du matériau)

## Deux idées macroscopiques :

1. Limitation de la dilatation volumique :
   on suppose qu'à partir d'une certaine dilatation volumique, il se produit des bulles de cavitation.
2. Limitation des élongations :
   on suppose qu'à partir d'une certaine dilatation linéique, il se produit une rupture de liaison.

La dilatation volumique et la dilatation linéique sont des grandeurs issues de la déformation macroscopique,

# Endommagement



## Objectif microscopique :

Se protéger des ruptures de liaisons interatomiques.
(« affaiblissement » du matériau)

## Deux idées macroscopiques :

1. Limitation de la dilatation volumique :
   on suppose qu'à partir d'une certaine dilatation volumique, il se produit des bulles de cavitation.
2. Limitation des élongations :
   on suppose qu'à partir d'une certaine dilatation linéique, il se produit une rupture de liaison.

La dilatation volumique et la dilatation linéique sont des grandeurs issues de la déformation macroscopique, qui tentent de refléter l'éloignement des corpuscules microscopiques.

# Endommagement par cavitation (1/3)

# Endommagement par cavitation (1/3)



## Choix d'un critère macroscopique :

# Endommagement par cavitation (1/3)



## Choix d'un critère macroscopique :

$$K_v \leq K_{v\,lim}$$

# Endommagement par cavitation (1/3)



## Choix d'un critère macroscopique :

$K_v \leq K_{v\,lim}$ ($K_{v\,lim}$ : caractéristique du matériau)

# Endommagement par cavitation (1/3)



## Choix d'un critère macroscopique :

$K_v \leq K_{v\,lim}$ ($K_{v\,lim}$ : caractéristique du matériau)

## Choix d'une variable d'état mnésique :

# Endommagement par cavitation (1/3)

Définition
Endom. par cavitation
Endom. par élongation

## Choix d'un critère macroscopique :

$K_v \leq K_{v\,lim}$ ($K_{v\,lim}$ : caractéristique du matériau)

## Choix d'une variable d'état mnésique :

$$c(t) = \sup_{\tau \in [t_0\,;t]} \langle h(K_v) - h(K_{v\,lim}) \rangle$$

# Endommagement par cavitation (1/3)



## Choix d'un critère macroscopique :

$K_v \leq K_{v\,lim}$ ($K_{v\,lim}$ : caractéristique du matériau)

## Choix d'une variable d'état mnésique :

$$c(t) = \sup_{\tau \in [t_0\,;t]} \langle h(K_v) - h(K_{v\,lim}) \rangle \quad \text{où } \forall x > 0, \quad h'(x) > 0.$$

# Endommagement par cavitation (1/3)



## Choix d'un critère macroscopique :

$K_v \leq K_{v\,lim}$ ($K_{v\,lim}$ : caractéristique du matériau) $\Leftrightarrow$ $h(K_v) \leq h(K_{v\,lim})$

## Choix d'une variable d'état mnésique :

$c(t) = \sup\limits_{\tau \in [t_0\,;t]} \langle h(K_v) - h(K_{v\,lim}) \rangle$ où $\forall x > 0,\quad h'(x) > 0.$

# Endommagement par cavitation (1/3)

Définition
Endom. par cavitation
Endom. par élongation

## Choix d'un critère macroscopique :

$K_v \leq K_{v\,lim}$ ($K_{v\,lim}$ : caractéristique du matériau) $\Leftrightarrow$ $h(K_v) \leq h(K_{v\,lim})$

## Choix d'une variable d'état mnésique :

$c(t) = \sup\limits_{\tau \in [t_0\,;t]} \langle h(K_v) - h(K_{v\,lim}) \rangle$ où $\forall x > 0, \quad h'(x) > 0.$

## Hypothèse simplificatrice :

# Endommagement par cavitation (1/3)



## Choix d'un critère macroscopique :

$K_v \leq K_{v\,lim}$ ($K_{v\,lim}$ : caractéristique du matériau) $\Leftrightarrow$ $h(K_v) \leq h(K_{v\,lim})$

## Choix d'une variable d'état mnésique :

$$c(t) = \sup_{\tau \in [t_0\,;t]} \langle h(K_v) - h(K_{v\,lim}) \rangle \quad \text{où } \forall x > 0, \quad h'(x) > 0.$$

## Hypothèse simplificatrice :

$K_{v\,lim}$ ne varie pas avec la température.

# Endommagement par cavitation (1/3)



## Choix d'un critère macroscopique :

$K_v \leq K_{v\,lim}$ ($K_{v\,lim}$ : caractéristique du matériau) $\Leftrightarrow$ $h(K_v) \leq h(K_{v\,lim})$

## Choix d'une variable d'état mnésique :

$$c(t) = \sup_{\tau \in [t_0\,;t]} \langle h(K_v) - h(K_{v\,lim}) \rangle \quad \text{où } \forall x > 0, \quad h'(x) > 0.$$

## Hypothèse simplificatrice :

$K_{v\,lim}$ ne varie pas avec la température.

## Évolution de la variable mnésique $c$ :

# Endommagement par cavitation (1/3)



## Choix d'un critère macroscopique :

$K_v \leq K_{v\,lim}$ ($K_{v\,lim}$ : caractéristique du matériau) $\Leftrightarrow$ $h(K_v) \leq h(K_{v\,lim})$

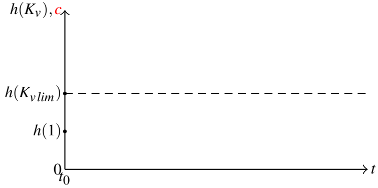
## Choix d'une variable d'état mnésique :

$$c(t) = \sup_{\tau \in [t_0\,;t]} \langle h(K_v) - h(K_{v\,lim}) \rangle \quad \text{où } \forall x > 0, \quad h'(x) > 0.$$

## Hypothèse simplificatrice :

$K_{v\,lim}$ ne varie pas avec la température.

## Évolution de la variable mnésique $c$ :



# Endommagement par cavitation (1/3)



## Choix d'un critère macroscopique :

$K_v \leq K_{v\,lim}$ ($K_{v\,lim}$ : caractéristique du matériau) $\Leftrightarrow$ $h(K_v) \leq h(K_{v\,lim})$

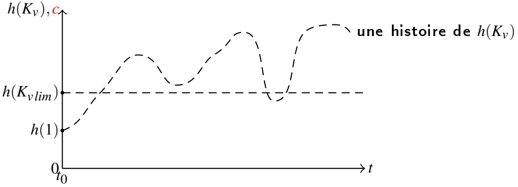
## Choix d'une variable d'état mnésique :

$$c(t) = \sup_{\tau \in [t_0\,;t]} \langle h(K_v) - h(K_{v\,lim}) \rangle \quad \text{où } \forall x > 0, \quad h'(x) > 0.$$

## Hypothèse simplificatrice :

$K_{v\,lim}$ ne varie pas avec la température.

## Évolution de la variable mnésique $c$ :



# Endommagement par cavitation (1/3)



## Choix d'un critère macroscopique :

$K_v \leq K_{v\,lim}$ ($K_{v\,lim}$ : caractéristique du matériau) $\Leftrightarrow$ $h(K_v) \leq h(K_{v\,lim})$

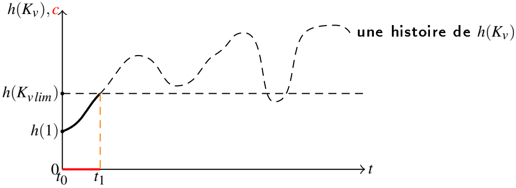
## Choix d'une variable d'état mnésique :

$$c(t) = \sup_{\tau \in [t_0\,;t]} \langle h(K_v) - h(K_{v\,lim}) \rangle \quad \text{où } \forall x > 0, \quad h'(x) > 0.$$

## Hypothèse simplificatrice :

$K_{v\,lim}$ ne varie pas avec la température.

## Évolution de la variable mnésique $c$ :



# Endommagement par cavitation (1/3)



## Choix d'un critère macroscopique :

$K_v \leq K_{v\,lim}$ ($K_{v\,lim}$ : caractéristique du matériau) $\Leftrightarrow$ $h(K_v) \leq h(K_{v\,lim})$

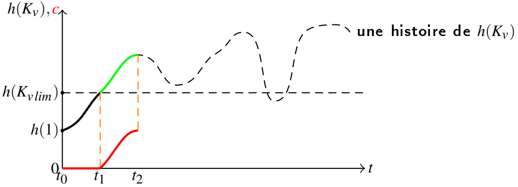
## Choix d'une variable d'état mnésique :

$$c(t) = \sup_{\tau \in [t_0\,;t]} \langle h(K_v) - h(K_{v\,lim}) \rangle \quad \text{où } \forall x > 0, \quad h'(x) > 0.$$

## Hypothèse simplificatrice :

$K_{v\,lim}$ ne varie pas avec la température.

## Évolution de la variable mnésique $c$ :



# Endommagement par cavitation (1/3)



## Choix d'un critère macroscopique :

$K_v \leq K_{v\,lim}$ ($K_{v\,lim}$ : caractéristique du matériau) $\Leftrightarrow$ $h(K_v) \leq h(K_{v\,lim})$

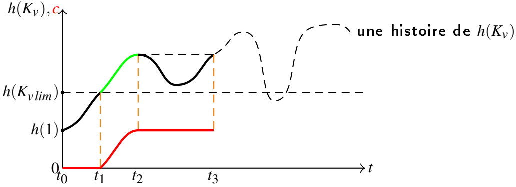
## Choix d'une variable d'état mnésique :

$$c(t) = \sup_{\tau \in [t_0\,;t]} \langle h(K_v) - h(K_{v\,lim}) \rangle \quad \text{où } \forall x > 0, \quad h'(x) > 0.$$

## Hypothèse simplificatrice :

$K_{v\,lim}$ ne varie pas avec la température.

## Évolution de la variable mnésique $c$ :



# Endommagement par cavitation (1/3)

Définition
Endom. par cavitation
Endom. par élongation

## Choix d'un critère macroscopique :

$K_v \leq K_{v\,lim}$ ($K_{v\,lim}$ : caractéristique du matériau) $\Leftrightarrow$ $h(K_v) \leq h(K_{v\,lim})$

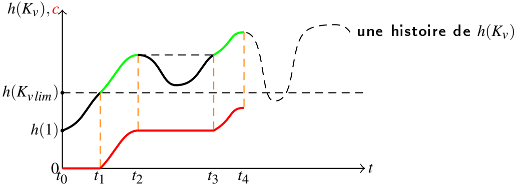
## Choix d'une variable d'état mnésique :

$$c(t) = \sup_{\tau\in[t_0\,;t]} \langle h(K_v) - h(K_{v\,lim}) \rangle \quad \text{où } \forall x>0, \quad h'(x)>0.$$

## Hypothèse simplificatrice :

$K_{v\,lim}$ ne varie pas avec la température.

## Évolution de la variable mnésique $c$ :



# Endommagement par cavitation (1/3)



## Choix d'un critère macroscopique :

$K_v \leq K_{v\,lim}$ ($K_{v\,lim}$ : caractéristique du matériau) $\Leftrightarrow$ $h(K_v) \leq h(K_{v\,lim})$

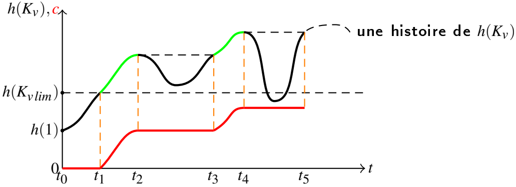
## Choix d'une variable d'état mnésique :

$$c(t) = \sup_{\tau \in [t_0\,;t]} \langle h(K_v) - h(K_{v\,lim}) \rangle \quad \text{où } \forall x > 0, \quad h'(x) > 0.$$

## Hypothèse simplificatrice :

$K_{v\,lim}$ ne varie pas avec la température.

## Évolution de la variable mnésique $c$ :



# Endommagement par cavitation (1/3)



## Choix d'un critère macroscopique :

$K_v \leq K_{v\,lim}$ ($K_{v\,lim}$ : caractéristique du matériau) $\Leftrightarrow$ $h(K_v) \leq h(K_{v\,lim})$

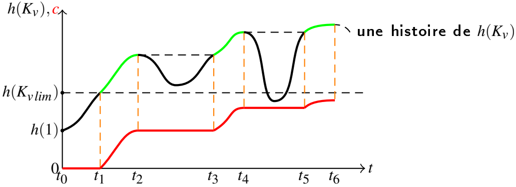
## Choix d'une variable d'état mnésique :

$$c(t) = \sup_{\tau \in [t_0\,;t]} \langle h(K_v) - h(K_{v\,lim}) \rangle \quad \text{où } \forall x > 0, \quad h'(x) > 0.$$

## Hypothèse simplificatrice :

$K_{v\,lim}$ ne varie pas avec la température.

## Évolution de la variable mnésique $c$ :



# Endommagement par cavitation (1/3)



## Choix d'un critère macroscopique :

$K_v \leq K_{v\,lim}$ ($K_{v\,lim}$ : caractéristique du matériau) $\Leftrightarrow$ $h(K_v) \leq h(K_{v\,lim})$

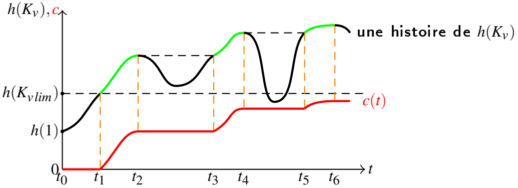
## Choix d'une variable d'état mnésique :

$$c(t) = \sup_{\tau \in [t_0\,;t]} \langle h(K_v) - h(K_{v\,lim}) \rangle \quad \text{où } \forall x > 0, \quad h'(x) > 0.$$

## Hypothèse simplificatrice :

$K_{v\,lim}$ ne varie pas avec la température.

## Évolution de la variable mnésique $c$ :



# Endommagement par cavitation (2/3)

# Endommagement par cavitation (2/3)

## Propriétés :

# Endommagement par cavitation (2/3)



## Propriétés :

(mêmes démonstrations qu'en plasticité)

# Endommagement par cavitation (2/3)



## Propriétés : (mêmes démonstrations qu'en plasticité)

- La variable d'état mnésique $c$ est scalaire,

# Endommagement par cavitation (2/3)

## Propriétés : (mêmes démonstrations qu'en plasticité)

- La variable d'état mnésique $c$ est scalaire, objective

# Endommagement par cavitation (2/3)



## Propriétés : (mêmes démonstrations qu'en plasticité)

- La variable d'état mnésique $c$ est scalaire, objective et non négative.

# Endommagement par cavitation (2/3)



## Propriétés : (mêmes démonstrations qu'en plasticité)

- La variable d'état mnésique $c$ est scalaire, objective et non négative.
- L'espace des états admissibles est défini par l'inégalité :
  $h(K_v) \leq h(K_{v\,lim}) + c$.

# Endommagement par cavitation (2/3)



## Propriétés : (mêmes démonstrations qu'en plasticité)

- La variable d'état mnésique $c$ est scalaire, objective et non négative.
- L'espace des états admissibles est défini par l'inégalité : $h(K_v) \leq h(K_{v\,lim}) + c$.
- La variable d'état mnésique $c$ ne peut pas diminuer : $\dot{c} \geqslant 0$.

# Endommagement par cavitation (2/3)



## Propriétés : (mêmes démonstrations qu'en plasticité)

- La variable d'état mnésique $c$ est scalaire, objective et non négative.
- L'espace des états admissibles est défini par l'inégalité :
  $h(K_v) \leq h(K_{v\,lim}) + c$.
- La variable d'état mnésique $c$ ne peut pas diminuer :
  $\dot{c} \geqslant 0$.

## Loi d'évolution :

# Endommagement par cavitation (2/3)



## Propriétés : (mêmes démonstrations qu'en plasticité)

- La variable d'état mnésique $c$ est scalaire, objective et non négative.
- L'espace des états admissibles est défini par l'inégalité :
  $h(K_v) \leq h(K_{v\,lim}) + c.$
- La variable d'état mnésique $c$ ne peut pas diminuer :
  $\dot{c} \geqslant 0.$

## Loi d'évolution :

$$\dot{c} = \mathscr{H}\left(h(K_v) - h(K_{v\,lim}) - c\right) {\color{red} h'(K_v)}\, \underbrace{K_v \langle \boldsymbol{G} : \boldsymbol{D} \rangle}_{\langle \dot{K}_v \rangle}$$

# Endommagement par cavitation (2/3)



## Propriétés : (mêmes démonstrations qu'en plasticité)

- La variable d'état mnésique $c$ est scalaire, objective et non négative.
- L'espace des états admissibles est défini par l'inégalité : $h(K_v) \leq h(K_{v\,lim}) + c$.
- La variable d'état mnésique $c$ ne peut pas diminuer : $\dot{c} \geqslant 0$.

## Loi d'évolution :

$$\dot{c} = \mathscr{H}\big(h(K_v) - h(K_{v\,lim}) - c\big)\, h'(K_v)\, \underbrace{K_v \langle \boldsymbol{G} : \boldsymbol{D} \rangle}_{\langle \dot{K}_v \rangle} \qquad \left(\tfrac{\dot{K}_v}{K_v} = \mathrm{tr}\boldsymbol{D}\right)$$

# Endommagement par cavitation (2/3)



## Propriétés : (mêmes démonstrations qu'en plasticité)

- La variable d'état mnésique $c$ est scalaire, objective et non négative.
- L'espace des états admissibles est défini par l'inégalité : $h(K_v) \leq h(K_{v\,lim}) + c$.
- La variable d'état mnésique $c$ ne peut pas diminuer : $\dot{c} \geqslant 0$.

## Loi d'évolution :

$$\dot{c} = \mathscr{H}\big(h(K_v) - h(K_{v\,lim}) - c\big)\, h'(K_v)\, \underbrace{K_v \langle \boldsymbol{G} : \boldsymbol{D} \rangle}_{\langle \dot{K}_v \rangle} \qquad \left(\frac{\dot{K}_v}{K_v} = \mathrm{tr}\boldsymbol{D}\right)$$

- La variable mnésique $c$ n'évolue que dans des chemins sur la frontière des états admissibles

# Endommagement par cavitation (2/3)



## Propriétés : (mêmes démonstrations qu'en plasticité)

- La variable d'état mnésique $c$ est scalaire, objective et non négative.
- L'espace des états admissibles est défini par l'inégalité :
  $$h(K_v) \leq h(K_{v\,lim}) + c.$$
- La variable d'état mnésique $c$ ne peut pas diminuer :
  $$\dot{c} \geqslant 0.$$

## Loi d'évolution :

$$\dot{c} = \mathscr{H}\big(h(K_v) - h(K_{v\,lim}) - c\big)\, h'(K_v)\, \underbrace{K_v \langle \boldsymbol{G} : \boldsymbol{D} \rangle}_{\langle \dot{K}_v \rangle} \qquad \left(\frac{\dot{K}_v}{K_v} = \mathrm{tr}\boldsymbol{D}\right)$$

- La variable mnésique $c$ n'évolue que dans des chemins sur la frontière des états admissibles et quand $\mathrm{tr}\boldsymbol{D} > 0$.

# Endommagement par cavitation (2/3)



## Propriétés : (mêmes démonstrations qu'en plasticité)

- La variable d'état mnésique $c$ est scalaire, objective et non négative.
- L'espace des états admissibles est défini par l'inégalité :
  $h(K_v) \leq h(K_{v\,lim}) + c$.
- La variable d'état mnésique $c$ ne peut pas diminuer :
  $\dot{c} \geqslant 0$.

## Loi d'évolution :

$$\dot{c} = \mathscr{H}\big(h(K_v) - h(K_{v\,lim}) - c\big)\, h'(K_v)\, \underbrace{K_v \langle \boldsymbol{G} : \boldsymbol{D} \rangle}_{\langle \dot{K}_v \rangle} \qquad \left(\frac{\dot{K}_v}{K_v} = \mathrm{tr}\boldsymbol{D}\right)$$

- La variable mnésique $c$ n'évolue que dans des chemins sur la frontière des états admissibles et quand $\mathrm{tr}\boldsymbol{D} > 0$.
- Le choix de la fonction $h$ permet de moduler la loi d'évolution.

# Endommagement par cavitation (3/3)

# Endommagement par cavitation (3/3)



## Dissipation intrinsèque : $\forall \dot{T}\ \forall \boldsymbol{D},\ \Phi_{int} \geqslant 0$

# Endommagement par cavitation (3/3)



## Dissipation intrinsèque : $\forall \dot{T}\ \forall \boldsymbol{D},\ \Phi_{int} \geqslant 0$

$$-\rho\,(\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s)\,\dot{T} + (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^{(c)}_{ref}) : \boldsymbol{D} - \rho\,\partial_c \bar{f}_\psi\,\dot{c} \geqslant 0$$

# Endommagement par cavitation (3/3)



**Dissipation intrinsèque :** $\forall \dot{T}\ \forall \boldsymbol{D},\ \Phi_{int} \geqslant 0$

$$-\rho\,(\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s)\,\dot{T} + (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^{(c)}_{ref}) : \boldsymbol{D} - \rho\,\partial_c \bar{f}_\psi\,\dot{c} \geqslant 0$$

$$-\rho\,(\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s)\,\dot{T} + (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^{(c)}_{ref}) : \boldsymbol{D} - \rho\,\partial_c \bar{f}_\psi\,\mathscr{H}\big(h(K_v) - h(K_{v\,lim}) - c\big)\,h'(K_v)\,K_v \langle \boldsymbol{G} : \boldsymbol{D} \rangle \geqslant 0$$

# Endommagement par cavitation (3/3)



## Dissipation intrinsèque : $\forall \dot{T}\ \forall \boldsymbol{D},\ \Phi_{int} \geqslant 0$

$$-\rho\,(\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s)\,\dot{T} + (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^{(c)}_{ref}) : \boldsymbol{D} - \rho\,\partial_c \bar{f}_\psi\,\dot{c} \geqslant 0$$

$$-\rho\,(\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s)\,\dot{T} + \underbrace{(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^{(c)}_{ref}) : \boldsymbol{D} - \rho\,\partial_c \bar{f}_\psi\,\mathscr{H}\big(h(K_v) - h(K_{v\,lim}) - c\big)\,h'(K_v)\,K_v\langle \boldsymbol{G} : \boldsymbol{D}\rangle}_{\text{n'est pas fonction de } \dot{T}} \geqslant 0$$

# Endommagement par cavitation (3/3)



## Dissipation intrinsèque : $\forall \dot{T}\, \forall \boldsymbol{D},\ \Phi_{int} \geqslant 0$

$$-\rho\,(\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s)\,\dot{T} + (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_{ref}^{(c)}) : \boldsymbol{D} - \rho\,\partial_c \bar{f}_\psi\,\dot{c} \geqslant 0$$

$$-\rho\,(\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s)\,\dot{T} + \underbrace{(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_{ref}^{(c)}) : \boldsymbol{D} - \rho\,\partial_c \bar{f}_\psi\,\mathscr{H}\big(h(K_v) - h(K_{v\,lim}) - c\big)\,h'(K_v)\,K_v \langle \boldsymbol{G} : \boldsymbol{D} \rangle}_{\text{n'est pas fonction de } \dot{T}} \geqslant 0$$

## Relation de Helmholtz :

# Endommagement par cavitation (3/3)

Définition

Endom. par cavitation

Endom. par élongation

## Dissipation intrinsèque : $\forall \dot{T}\, \forall \boldsymbol{D},\ \Phi_{int} \geqslant 0$

$$-\rho\,(\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s)\,\dot{T} + (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^{(c)}_{ref}) : \boldsymbol{D} - \rho\,\partial_c \bar{f}_\psi\,\dot{c} \geqslant 0$$

$$-\rho\,(\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s)\,\dot{T} + \underbrace{(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^{(c)}_{ref}) : \boldsymbol{D} - \rho\,\partial_c \bar{f}_\psi\,\mathscr{H}\big(h(K_v) - h(K_{v\,lim}) - c\big)\,h'(K_v)\,K_v \langle \boldsymbol{G} : \boldsymbol{D} \rangle}_{\text{n'est pas fonction de } \dot{T}} \geqslant 0$$

## Relation de Helmholtz : $\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s = 0$

# Endommagement par cavitation (3/3)

Définition
Endom. par cavitation
Endom. par élongation

**Dissipation intrinsèque :** $\forall \dot{T}\ \forall \boldsymbol{D},\ \Phi_{int} \geqslant 0$

$$-\rho\,(\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s)\,\dot{T} + (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^{(c)}_{ref}) : \boldsymbol{D} - \rho\,\partial_c \bar{f}_\psi\,\dot{c} \geqslant 0$$

$$-\rho\,(\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s)\,\dot{T} + \underbrace{(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^{(c)}_{ref}) : \boldsymbol{D} - \rho\,\partial_c \bar{f}_\psi\,\mathscr{H}\big(h(K_v) - h(K_{v\,lim}) - c\big)\,h'(K_v)\,K_v \langle \boldsymbol{G} : \boldsymbol{D} \rangle}_{\text{n'est pas fonction de } \dot{T}} \geqslant 0$$

**Relation de Helmholtz :** $\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s = 0$

**Comportement mécanique :**

# Endommagement par cavitation (3/3)



**Dissipation intrinsèque :** $\forall \dot{T}\ \forall \boldsymbol{D},\ \Phi_{int} \geqslant 0$

$$-\rho\,(\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s)\,\dot{T} + (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^{(c)}_{ref}) : \boldsymbol{D} - \rho\,\partial_c \bar{f}_\psi\,\dot{c} \geqslant 0$$

$$-\rho\,(\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s)\,\dot{T} + \underbrace{(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^{(c)}_{ref}) : \boldsymbol{D} - \rho\,\partial_c \bar{f}_\psi\,\mathscr{H}\big(h(K_v) - h(K_{v\,lim}) - c\big)\,h'(K_v)\,K_v\langle \boldsymbol{G} : \boldsymbol{D}\rangle}_{\text{n'est pas fonction de } \dot{T}} \geqslant 0$$

**Relation de Helmholtz :** $\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s = 0$

**Comportement mécanique :**

- En évolution cavitante :

# Endommagement par cavitation (3/3)



**Dissipation intrinsèque :** $\forall \dot{T}\ \forall \boldsymbol{D},\ \Phi_{int} \geqslant 0$

$$-\rho\,(\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s)\,\dot{T} + (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^{(c)}_{ref}) : \boldsymbol{D} - \rho\,\partial_c \bar{f}_\psi\,\dot{c} \geqslant 0$$

$$-\rho\,(\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s)\,\dot{T} + \underbrace{(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^{(c)}_{ref}) : \boldsymbol{D} - \rho\,\partial_c \bar{f}_\psi\,\mathscr{H}\big(h(K_v) - h(K_{v\,lim}) - c\big)\,h'(K_v)\,K_v \langle \boldsymbol{G} : \boldsymbol{D} \rangle}_{\text{n'est pas fonction de } \dot{T}} \geqslant 0$$

**Relation de Helmholtz :** $\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s = 0$

**Comportement mécanique :**

- En évolution cavitante : $(\dot{c} > 0 \Leftrightarrow \mathscr{H}\big(h(K_v) - h(K_{v\,lim}) - c\big) = 1$ **et** $\boldsymbol{G} : \boldsymbol{D} > 0)$

# Endommagement par cavitation (3/3)



## Dissipation intrinsèque : $\forall \dot{T}\ \forall \boldsymbol{D},\ \Phi_{int} \geqslant 0$

$$-\rho\,(\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s)\,\dot{T} + (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^{(c)}_{ref}) : \boldsymbol{D} - \rho\,\partial_c \bar{f}_\psi\,\dot{c} \geqslant 0$$

$$-\rho\,(\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s)\,\dot{T} + \underbrace{(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^{(c)}_{ref}) : \boldsymbol{D} - \rho\,\partial_c \bar{f}_\psi\,\mathscr{H}\big(h(K_v) - h(K_{v\,lim}) - c\big)\,h'(K_v)\,K_v \langle \boldsymbol{G} : \boldsymbol{D} \rangle}_{\text{n'est pas fonction de } \dot{T}} \geqslant 0$$

## Relation de Helmholtz : $\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s = 0$

## Comportement mécanique :

- En évolution cavitante : $\big(\dot{c} > 0 \Leftrightarrow \mathscr{H}\big(h(K_v) - h(K_{v\,lim}) - c\big) = 1$ et $\boldsymbol{G} : \boldsymbol{D} > 0\big)$

  $\forall \boldsymbol{D},\ \big(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^{(c)}_{ref} - \rho\,\partial_c \bar{f}_\psi\,h'(K_v)\,K_v\,\boldsymbol{G}\big) : \boldsymbol{D} \geqslant 0$

# Endommagement par cavitation (3/3)



## Dissipation intrinsèque : $\forall \dot{T}\ \forall \boldsymbol{D},\ \Phi_{int} \geqslant 0$

$$-\rho\,(\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s)\,\dot{T} + (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_{ref}^{(c)}) : \boldsymbol{D} - \rho\,\partial_c \bar{f}_\psi\,\dot{c} \geqslant 0$$

$$-\rho\,(\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s)\,\dot{T} + \underbrace{(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_{ref}^{(c)}) : \boldsymbol{D} - \rho\,\partial_c \bar{f}_\psi\,\mathscr{H}\big(h(K_v) - h(K_{v\,lim}) - c\big)\,h'(K_v)\,K_v\langle \boldsymbol{G} : \boldsymbol{D}\rangle}_{\text{n'est pas fonction de } \dot{T}} \geqslant 0$$

## Relation de Helmholtz : $\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s = 0$

## Comportement mécanique :

- En évolution cavitante : $\left(\dot{c} > 0 \Leftrightarrow \mathscr{H}\big(h(K_v) - h(K_{v\,lim}) - c\big) = 1 \text{ et } \boldsymbol{G} : \boldsymbol{D} > 0\right)$

  $\forall \boldsymbol{D},\ \left(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_{ref}^{(c)} - \rho\,\partial_c \bar{f}_\psi\,h'(K_v)\,K_v\,\boldsymbol{G}\right) : \boldsymbol{D} \geqslant 0$

  $\exists \boldsymbol{g} \mid \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_{ref}^{(c)} + \rho\,\partial_c \bar{f}_\psi\,h'(K_v)\,K_v\,\boldsymbol{G} + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{D}, \cdots)$ où $\forall \boldsymbol{D},\ \boldsymbol{g}(\boldsymbol{D}, \cdots) : \boldsymbol{D} \geqslant 0$

# Endommagement par cavitation (3/3)



**Dissipation intrinsèque :** $\forall \dot{T}\ \forall \boldsymbol{D},\ \Phi_{int} \geqslant 0$

$$-\rho\,(\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s)\,\dot{T} + (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_{ref}^{(c)}) : \boldsymbol{D} - \rho\,\partial_c \bar{f}_\psi\,\dot{c} \geqslant 0$$

$$-\rho\,(\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s)\,\dot{T} + \underbrace{(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_{ref}^{(c)}) : \boldsymbol{D} - \rho\,\partial_c \bar{f}_\psi\,\mathscr{H}\big(h(K_v) - h(K_{v\,lim}) - c\big)\,h'(K_v)\,K_v \langle \boldsymbol{G} : \boldsymbol{D} \rangle}_{\text{n'est pas fonction de } \dot{T}} \geqslant 0$$

**Relation de Helmholtz :** $\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s = 0$

**Comportement mécanique :**

- En évolution cavitante : $\left(\dot{c} > 0 \Leftrightarrow \mathscr{H}\big(h(K_v) - h(K_{v\,lim}) - c\big) = 1 \text{ et } \boldsymbol{G} : \boldsymbol{D} > 0\right)$

  $\forall \boldsymbol{D},\ \left(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_{ref}^{(c)} - \rho\,\partial_c \bar{f}_\psi\,h'(K_v)\,K_v\,\boldsymbol{G}\right) : \boldsymbol{D} \geqslant 0$

  $\exists \boldsymbol{g} \mid \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_{ref}^{(c)} + \rho\,\partial_c \bar{f}_\psi\,h'(K_v)\,K_v\,\boldsymbol{G} + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{D}, \cdots)$ où $\forall \boldsymbol{D},\ \boldsymbol{g}(\boldsymbol{D}, \cdots) : \boldsymbol{D} \geqslant 0$

- En évolution non cavitante :

# Endommagement par cavitation (3/3)

Définition
Endom. par cavitation
Endom. par élongation

## Dissipation intrinsèque : $\forall \dot{T}\, \forall \boldsymbol{D},\ \Phi_{int} \geqslant 0$

$$-\rho\,(\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s)\,\dot{T} + (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_{ref}^{(c)}) : \boldsymbol{D} - \rho\,\partial_c \bar{f}_\psi\, \dot{c} \geqslant 0$$

$$-\rho\,(\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s)\,\dot{T} + \underbrace{(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_{ref}^{(c)}) : \boldsymbol{D} - \rho\,\partial_c \bar{f}_\psi\, \mathscr{H}\big(h(K_v) - h(K_{v\,lim}) - c\big)\, h'(K_v)\, K_v \langle \boldsymbol{G} : \boldsymbol{D} \rangle}_{\text{n'est pas fonction de } \dot{T}} \geqslant 0$$

## Relation de Helmholtz : $\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s = 0$

## Comportement mécanique :

- En évolution cavitante : $\big(\dot{c} > 0 \Leftrightarrow \mathscr{H}\big(h(K_v) - h(K_{v\,lim}) - c\big) = 1$ et $\boldsymbol{G} : \boldsymbol{D} > 0\big)$

  $\forall \boldsymbol{D},\ \big(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_{ref}^{(c)} - \rho\,\partial_c \bar{f}_\psi\, h'(K_v)\, K_v\, \boldsymbol{G}\big) : \boldsymbol{D} \geqslant 0$

  $\exists \boldsymbol{g} \mid \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_{ref}^{(c)} + \rho\,\partial_c \bar{f}_\psi\, h'(K_v)\, K_v\, \boldsymbol{G} + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{D}, \cdots)$ où $\forall \boldsymbol{D},\ \boldsymbol{g}(\boldsymbol{D}, \cdots) : \boldsymbol{D} \geqslant 0$
- En évolution non cavitante : $\big(\dot{c} = 0 \Leftrightarrow \mathscr{H}\big(h(K_v) - h(K_{v\,lim}) - c\big) = 0$ ou $\boldsymbol{G} : \boldsymbol{D} < 0\big)$

# Endommagement par cavitation (3/3)



**Dissipation intrinsèque :** $\forall \dot T\, \forall \boldsymbol{D},\ \Phi_{int} \geqslant 0$

$$-\rho\,(\partial_T \bar f_\psi + \bar f_s)\,\dot T + (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^{(c)}_{ref}) : \boldsymbol{D} - \rho\,\partial_c \bar f_\psi\,\dot c \geqslant 0$$

$$-\rho\,(\partial_T \bar f_\psi + \bar f_s)\,\dot T + \underbrace{(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^{(c)}_{ref}) : \boldsymbol{D} - \rho\,\partial_c \bar f_\psi\, \mathscr{H}\big(h(K_v) - h(K_{v\,lim}) - c\big)\, h'(K_v)\, K_v \langle \boldsymbol{G} : \boldsymbol{D}\rangle}_{\text{n'est pas fonction de } \dot T} \geqslant 0$$

**Relation de Helmholtz :** $\partial_T \bar f_\psi + \bar f_s = 0$

**Comportement mécanique :**

- En évolution cavitante : $\big(\dot c > 0 \Leftrightarrow \mathscr{H}\big(h(K_v) - h(K_{v\,lim}) - c\big) = 1$ et $\boldsymbol{G} : \boldsymbol{D} > 0\big)$

  $\forall \boldsymbol{D},\ \big(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^{(c)}_{ref} - \rho\,\partial_c \bar f_\psi\, h'(K_v)\, K_v\, \boldsymbol{G}\big) : \boldsymbol{D} \geqslant 0$

  $\exists \boldsymbol{g} \mid \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^{(c)}_{ref} + \rho\,\partial_c \bar f_\psi\, h'(K_v)\, K_v\, \boldsymbol{G} + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{D}, \cdots)$ où $\forall \boldsymbol{D},\ \boldsymbol{g}(\boldsymbol{D}, \cdots) : \boldsymbol{D} \geqslant 0$

- En évolution non cavitante : $\big(\dot c = 0 \Leftrightarrow \mathscr{H}\big(h(K_v) - h(K_{v\,lim}) - c\big) = 0$ ou $\boldsymbol{G} : \boldsymbol{D} < 0\big)$

  $\forall \boldsymbol{D},\ (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^{(c)}_{ref}) : \boldsymbol{D} \geqslant 0$

# Endommagement par cavitation (3/3)



## Dissipation intrinsèque : $\forall \dot{T}\ \forall \boldsymbol{D},\ \Phi_{int} \geqslant 0$

$$-\rho\,(\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s)\,\dot{T} + (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^{(c)}_{ref}) : \boldsymbol{D} - \rho\,\partial_c \bar{f}_\psi\,\dot{c} \geqslant 0$$

$$-\rho\,(\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s)\,\dot{T} + \underbrace{(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^{(c)}_{ref}) : \boldsymbol{D} - \rho\,\partial_c \bar{f}_\psi\,\mathscr{H}\big(h(K_v) - h(K_{v\,lim}) - c\big)\,h'(K_v)\,K_v \langle \boldsymbol{G} : \boldsymbol{D}\rangle}_{\text{n'est pas fonction de } \dot{T}} \geqslant 0$$

## Relation de Helmholtz : $\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s = 0$

## Comportement mécanique :

- En évolution cavitante : $\big(\dot{c} > 0 \Leftrightarrow \mathscr{H}\big(h(K_v) - h(K_{v\,lim}) - c\big) = 1$ et $\boldsymbol{G} : \boldsymbol{D} > 0\big)$

  $\forall \boldsymbol{D},\ \big(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^{(c)}_{ref} - \rho\,\partial_c \bar{f}_\psi\,h'(K_v)\,K_v\,\boldsymbol{G}\big) : \boldsymbol{D} \geqslant 0$

  $\exists \boldsymbol{g} \mid \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^{(c)}_{ref} + \rho\,\partial_c \bar{f}_\psi\,h'(K_v)\,K_v\,\boldsymbol{G} + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{D},\cdots)$ où $\forall \boldsymbol{D},\ \boldsymbol{g}(\boldsymbol{D},\cdots) : \boldsymbol{D} \geqslant 0$

- En évolution non cavitante : $\big(\dot{c} = 0 \Leftrightarrow \mathscr{H}\big(h(K_v) - h(K_{v\,lim}) - c\big) = 0$ ou $\boldsymbol{G} : \boldsymbol{D} < 0\big)$

  $\forall \boldsymbol{D},\ (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^{(c)}_{ref}) : \boldsymbol{D} \geqslant 0$

  $\exists \boldsymbol{f} \mid \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^{(c)}_{ref} + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{D},\cdots)$ où $\forall \boldsymbol{D},\ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{D},\cdots) : \boldsymbol{D} \geqslant 0$

# Endommagement par cavitation (3/3)

Définition

Endom. par cavitation

Endom. par élongation

**Dissipation intrinsèque :** $\forall \dot{T}\ \forall \boldsymbol{D},\ \Phi_{int} \geqslant 0$

$$-\rho\,(\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s)\,\dot{T} + (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_{ref}^{(c)}) : \boldsymbol{D} - \rho\,\partial_c \bar{f}_\psi\,\dot{c} \geqslant 0$$

$$-\rho\,(\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s)\,\dot{T} + \underbrace{(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_{ref}^{(c)}) : \boldsymbol{D} - \rho\,\partial_c \bar{f}_\psi\,\mathscr{H}\big(h(K_v) - h(K_{v\,lim}) - c\big)\,h'(K_v)\,K_v \langle \boldsymbol{G} : \boldsymbol{D} \rangle}_{\text{n'est pas fonction de } \dot{T}} \geqslant 0$$

**Relation de Helmholtz :** $\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s = 0$

**Comportement mécanique :**

- En évolution cavitante : $(\dot{c} > 0 \Leftrightarrow \mathscr{H}\big(h(K_v) - h(K_{v\,lim}) - c\big) = 1$ et $\boldsymbol{G} : \boldsymbol{D} > 0)$

  $\forall \boldsymbol{D},\ \big(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_{ref}^{(c)} - \rho\,\partial_c \bar{f}_\psi\,h'(K_v)\,K_v\,\boldsymbol{G}\big) : \boldsymbol{D} \geqslant 0$

  $\exists \boldsymbol{g} \mid \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_{ref}^{(c)} + \rho\,\partial_c \bar{f}_\psi\,h'(K_v)\,K_v\,\boldsymbol{G} + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{D}, \cdots)$ où $\forall \boldsymbol{D},\ \boldsymbol{g}(\boldsymbol{D}, \cdots) : \boldsymbol{D} \geqslant 0$

- En évolution non cavitante : $(\dot{c} = 0 \Leftrightarrow \mathscr{H}\big(h(K_v) - h(K_{v\,lim}) - c\big) = 0$ ou $\boldsymbol{G} : \boldsymbol{D} < 0)$

  $\forall \boldsymbol{D},\ (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_{ref}^{(c)}) : \boldsymbol{D} \geqslant 0$

  $\exists \boldsymbol{f} \mid \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_{ref}^{(c)} + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{D}, \cdots)$ où $\forall \boldsymbol{D},\ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{D}, \cdots) : \boldsymbol{D} \geqslant 0$

- Continuité des contraintes sur la frontière :

# Endommagement par cavitation (3/3)



## Dissipation intrinsèque : $\forall \dot{T}\ \forall \boldsymbol{D},\ \Phi_{int} \geqslant 0$

$$-\rho\,(\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s)\,\dot{T} + (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^{(c)}_{ref}) : \boldsymbol{D} - \rho\,\partial_c \bar{f}_\psi\,\dot{c} \geqslant 0$$

$$-\rho\,(\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s)\,\dot{T} + \underbrace{(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^{(c)}_{ref}) : \boldsymbol{D} - \rho\,\partial_c \bar{f}_\psi\,\mathscr{H}\big(h(K_v) - h(K_{v\,lim}) - c\big)\,h'(K_v)\,K_v\langle \boldsymbol{G} : \boldsymbol{D}\rangle}_{\text{n'est pas fonction de } \dot{T}} \geqslant 0$$

## Relation de Helmholtz : $\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s = 0$

## Comportement mécanique :

- En évolution cavitante : $(\dot{c} > 0 \Leftrightarrow \mathscr{H}\big(h(K_v) - h(K_{v\,lim}) - c\big) = 1$ et $\boldsymbol{G} : \boldsymbol{D} > 0)$

  $\forall \boldsymbol{D},\ \big(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^{(c)}_{ref} - \rho\,\partial_c \bar{f}_\psi\,h'(K_v)\,K_v\,\boldsymbol{G}\big) : \boldsymbol{D} \geqslant 0$

  $\exists \boldsymbol{g}\ |\ \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^{(c)}_{ref} + \rho\,\partial_c \bar{f}_\psi\,h'(K_v)\,K_v\,\boldsymbol{G} + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{D},\cdots)$ où $\forall \boldsymbol{D},\ \boldsymbol{g}(\boldsymbol{D},\cdots) : \boldsymbol{D} \geqslant 0$

- En évolution non cavitante : $(\dot{c} = 0 \Leftrightarrow \mathscr{H}\big(h(K_v) - h(K_{v\,lim}) - c\big) = 0$ ou $\boldsymbol{G} : \boldsymbol{D} < 0)$

  $\forall \boldsymbol{D},\ (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^{(c)}_{ref}) : \boldsymbol{D} \geqslant 0$

  $\exists \boldsymbol{f}\ |\ \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^{(c)}_{ref} + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{D},\cdots)$ où $\forall \boldsymbol{D},\ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{D},\cdots) : \boldsymbol{D} \geqslant 0$

- Continuité des contraintes sur la frontière : $(h(K_v) + c = h(K_{v\,lim}))$

# Endommagement par cavitation (3/3)



## Dissipation intrinsèque : $\forall \dot{T}\ \forall \boldsymbol{D},\ \Phi_{int} \geqslant 0$

$$-\rho\,(\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s)\,\dot{T} + (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^{(c)}_{ref}) : \boldsymbol{D} - \rho\,\partial_c \bar{f}_\psi\,\dot{c} \geqslant 0$$

$$-\rho\,(\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s)\,\dot{T} + \underbrace{(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^{(c)}_{ref}) : \boldsymbol{D} - \rho\,\partial_c \bar{f}_\psi\,\mathscr{H}\big(h(K_v) - h(K_{v\,lim}) - c\big)\,h'(K_v)\,K_v \langle \boldsymbol{G} : \boldsymbol{D}\rangle}_{\text{n'est pas fonction de } \dot{T}} \geqslant 0$$

## Relation de Helmholtz : $\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s = 0$

## Comportement mécanique :

- En évolution cavitante : $\left(\dot{c} > 0 \Leftrightarrow \mathscr{H}\big(h(K_v) - h(K_{v\,lim}) - c\big) = 1 \text{ et } \boldsymbol{G} : \boldsymbol{D} > 0\right)$

  $\forall \boldsymbol{D},\ \left(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^{(c)}_{ref} - \rho\,\partial_c \bar{f}_\psi\,h'(K_v)\,K_v\,\boldsymbol{G}\right) : \boldsymbol{D} \geqslant 0$

  $\exists \boldsymbol{g} \mid \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^{(c)}_{ref} + \rho\,\partial_c \bar{f}_\psi\,h'(K_v)\,K_v\,\boldsymbol{G} + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{D},\cdots)$ où $\forall \boldsymbol{D},\ \boldsymbol{g}(\boldsymbol{D},\cdots) : \boldsymbol{D} \geqslant 0$

- En évolution non cavitante : $\left(\dot{c} = 0 \Leftrightarrow \mathscr{H}\big(h(K_v) - h(K_{v\,lim}) - c\big) = 0 \text{ ou } \boldsymbol{G} : \boldsymbol{D} < 0\right)$

  $\forall \boldsymbol{D},\ (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^{(c)}_{ref}) : \boldsymbol{D} \geqslant 0$

  $\exists \boldsymbol{f} \mid \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^{(c)}_{ref} + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{D},\cdots)$ où $\forall \boldsymbol{D},\ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{D},\cdots) : \boldsymbol{D} \geqslant 0$

- Continuité des contraintes sur la frontière : $(h(K_v) + c = h(K_{v\,lim}))$

  $\left[\partial_c \bar{f}_\psi\right]_{(h(K_v)+c=h(K_{v\,lim}))} = 0$

# Endommagement par cavitation (3/3)

Définition
Endom. par cavitation
Endom. par élongation

## Dissipation intrinsèque : $\forall \dot{T}\ \forall \boldsymbol{D},\ \Phi_{int} \geqslant 0$

$$-\rho\,(\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s)\,\dot{T} + (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^{(c)}_{ref}) : \boldsymbol{D} - \rho\,\partial_c \bar{f}_\psi\,\dot{c} \geqslant 0$$

$$-\rho\,(\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s)\,\dot{T} + \underbrace{(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^{(c)}_{ref}) : \boldsymbol{D} - \rho\,\partial_c \bar{f}_\psi\,\mathscr{H}\big(h(K_v) - h(K_{v\,lim}) - c\big)\,h'(K_v)\,K_v \langle \boldsymbol{G} : \boldsymbol{D}\rangle}_{\text{n'est pas fonction de } \dot{T}} \geqslant 0$$

## Relation de Helmholtz : $\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s = 0$

## Comportement mécanique :

- En évolution cavitante : $(\dot{c} > 0 \Leftrightarrow \mathscr{H}\big(h(K_v) - h(K_{v\,lim}) - c\big) = 1$ et $\boldsymbol{G} : \boldsymbol{D} > 0)$

  $\forall \boldsymbol{D},\ \big(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^{(c)}_{ref} - \rho\,\partial_c \bar{f}_\psi\,h'(K_v)\,K_v\,\boldsymbol{G}\big) : \boldsymbol{D} \geqslant 0$

  $\exists \boldsymbol{g} \mid \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^{(c)}_{ref} + \rho\,\partial_c \bar{f}_\psi\,h'(K_v)\,K_v\,\boldsymbol{G} + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{D},\cdots)$ où $\forall \boldsymbol{D},\ \boldsymbol{g}(\boldsymbol{D},\cdots) : \boldsymbol{D} \geqslant 0$

- En évolution non cavitante : $(\dot{c} = 0 \Leftrightarrow \mathscr{H}\big(h(K_v) - h(K_{v\,lim}) - c\big) = 0$ ou $\boldsymbol{G} : \boldsymbol{D} < 0)$

  $\forall \boldsymbol{D},\ (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^{(c)}_{ref}) : \boldsymbol{D} \geqslant 0$

  $\exists \boldsymbol{f} \mid \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^{(c)}_{ref} + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{D},\cdots)$ où $\forall \boldsymbol{D},\ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{D},\cdots) : \boldsymbol{D} \geqslant 0$

- Continuité des contraintes sur la frontière : $(h(K_v) + c = h(K_{v\,lim}))$

  $\big[\partial_c \bar{f}_\psi\big]_{(h(K_v)+c=h(K_{v\,lim}))} = 0$

# Endommagement par cavitation (3/3)



**Dissipation intrinsèque :** $\forall \dot{T}\ \forall \boldsymbol{D},\ \Phi_{int} \geqslant 0$

$$-\rho\,(\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s)\,\dot{T} + (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^{(c)}_{ref}) : \boldsymbol{D} - \rho\,\partial_c \bar{f}_\psi\,\dot{c} \geqslant 0$$

$$-\rho\,(\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s)\,\dot{T} + \underbrace{(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^{(c)}_{ref}) : \boldsymbol{D} - \rho\,\partial_c \bar{f}_\psi\,\mathscr{H}\big(h(K_v) - h(K_{v\,lim}) - c\big)\,h'(K_v)\,K_v \langle \boldsymbol{G} : \boldsymbol{D}\rangle}_{\text{n'est pas fonction de } \dot{T}} \geqslant 0$$

**Relation de Helmholtz :** $\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s = 0$

**Comportement mécanique :**

- En évolution cavitante : $\left(\dot{c} > 0 \Leftrightarrow \mathscr{H}\big(h(K_v) - h(K_{v\,lim}) - c\big) = 1 \text{ et } \boldsymbol{G} : \boldsymbol{D} > 0\right)$

  $\forall \boldsymbol{D},\ \big(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^{(c)}_{ref} - \rho\,\partial_c \bar{f}_\psi\,h'(K_v)\,K_v\,\boldsymbol{G}\big) : \boldsymbol{D} \geqslant 0$

  $\exists \boldsymbol{g}\ \mid\ \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^{(c)}_{ref} + \rho\,\partial_c \bar{f}_\psi\,h'(K_v)\,K_v\,\boldsymbol{G} + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{D},\cdots)$ où $\forall \boldsymbol{D},\ \boldsymbol{g}(\boldsymbol{D},\cdots) : \boldsymbol{D} \geqslant 0$

- En évolution non cavitante : $\left(\dot{c} = 0 \Leftrightarrow \mathscr{H}\big(h(K_v) - h(K_{v\,lim}) - c\big) = 0 \text{ ou } \boldsymbol{G} : \boldsymbol{D} < 0\right)$

  $\forall \boldsymbol{D},\ (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^{(c)}_{ref}) : \boldsymbol{D} \geqslant 0$

  $\exists \boldsymbol{f}\ \mid\ \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^{(c)}_{ref} + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{D},\cdots)$ où $\forall \boldsymbol{D},\ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{D},\cdots) : \boldsymbol{D} \geqslant 0$

- Continuité des contraintes sur la frontière : $\big(h(K_v) + c = h(K_{v\,lim})\big)$

  $\big[\partial_c \bar{f}_\psi\big]_{(h(K_v)+c=h(K_{v\,lim}))} = 0$ et $\big[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{D},\cdots)\big]_{(h(K_v)+c=h(K_{v\,lim}))} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{D},\cdots)$

# Endommagement par cavitation (3/3)



## Dissipation intrinsèque : $\forall \dot{T}\ \forall \boldsymbol{D},\ \Phi_{int} \geqslant 0$

$$-\rho\,(\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s)\,\dot{T} + (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^{(c)}_{ref}) : \boldsymbol{D} - \rho\,\partial_c \bar{f}_\psi\,\dot{c} \geqslant 0$$

$$-\rho\,(\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s)\,\dot{T} + \underbrace{(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^{(c)}_{ref}) : \boldsymbol{D} - \rho\,\partial_c \bar{f}_\psi\,\mathscr{H}\big(h(K_v) - h(K_{v\,lim}) - c\big)\,h'(K_v)\,K_v \langle \boldsymbol{G} : \boldsymbol{D}\rangle}_{\text{n'est pas fonction de } \dot{T}} \geqslant 0$$

## Relation de Helmholtz : $\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s = 0$

## Comportement mécanique :

- En évolution cavitante : $\big(\dot{c} > 0 \Leftrightarrow \mathscr{H}\big(h(K_v) - h(K_{v\,lim}) - c\big) = 1$ et $\boldsymbol{G} : \boldsymbol{D} > 0\big)$

  $$\forall \boldsymbol{D},\ \big(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^{(c)}_{ref} - \rho\,\partial_c \bar{f}_\psi\,h'(K_v)\,K_v\,\boldsymbol{G}\big) : \boldsymbol{D} \geqslant 0$$

  $$\exists \boldsymbol{g} \mid \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^{(c)}_{ref} + \rho\,\partial_c \bar{f}_\psi\,h'(K_v)\,K_v\,\boldsymbol{G} + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{D}, \cdots) \quad \text{où } \forall \boldsymbol{D},\ \boldsymbol{g}(\boldsymbol{D}, \cdots) : \boldsymbol{D} \geqslant 0$$

- En évolution non cavitante : $\big(\dot{c} = 0 \Leftrightarrow \mathscr{H}\big(h(K_v) - h(K_{v\,lim}) - c\big) = 0$ ou $\boldsymbol{G} : \boldsymbol{D} < 0\big)$

  $$\forall \boldsymbol{D},\ (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^{(c)}_{ref}) : \boldsymbol{D} \geqslant 0$$

  $$\exists \boldsymbol{f} \mid \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^{(c)}_{ref} + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{D}, \cdots) \quad \text{où } \forall \boldsymbol{D},\ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{D}, \cdots) : \boldsymbol{D} \geqslant 0$$

- Continuité des contraintes sur la frontière : $(h(K_v) + c = h(K_{v\,lim}))$

  $$\big[\partial_c \bar{f}_\psi\big]_{(h(K_v)+c=h(K_{v\,lim}))} = 0 \quad \text{et} \quad \big[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{D}, \cdots)\big]_{(h(K_v)+c=h(K_{v\,lim}))} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{D}, \cdots)$$

- Finalement : $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^{(c)}_{ref} + \boldsymbol{\sigma}_d$

# Endommagement par cavitation (3/3)

Définition
Endom. par cavitation
Endom. par élongation

**Dissipation intrinsèque :** $\forall \dot{T}\ \forall \boldsymbol{D},\ \Phi_{int} \geqslant 0$

$$-\rho\,(\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s)\,\dot{T} + (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^{(c)}_{ref}) : \boldsymbol{D} - \rho\,\partial_c \bar{f}_\psi\,\dot{c} \geqslant 0$$

$$-\rho\,(\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s)\,\dot{T} + \underbrace{(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^{(c)}_{ref}) : \boldsymbol{D} - \rho\,\partial_c \bar{f}_\psi\,\mathscr{H}\big(h(K_v) - h(K_{v\,lim}) - c\big)\,h'(K_v)\,K_v\langle \boldsymbol{G} : \boldsymbol{D}\rangle}_{\text{n'est pas fonction de } \dot{T}} \geqslant 0$$

**Relation de Helmholtz :** $\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s = 0$

**Comportement mécanique :**

- En évolution cavitante : $\left(\dot{c} > 0 \Leftrightarrow \mathscr{H}\big(h(K_v) - h(K_{v\,lim}) - c\big) = 1 \text{ et } \boldsymbol{G} : \boldsymbol{D} > 0\right)$

  $\forall \boldsymbol{D},\ \left(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^{(c)}_{ref} - \rho\,\partial_c \bar{f}_\psi\,h'(K_v)\,K_v\,\boldsymbol{G}\right) : \boldsymbol{D} \geqslant 0$

  $\exists \boldsymbol{g}\ \mid\ \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^{(c)}_{ref} + \rho\,\partial_c \bar{f}_\psi\,h'(K_v)\,K_v\,\boldsymbol{G} + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{D},\cdots)$ où $\forall \boldsymbol{D},\ \boldsymbol{g}(\boldsymbol{D},\cdots) : \boldsymbol{D} \geqslant 0$

- En évolution non cavitante : $\left(\dot{c} = 0 \Leftrightarrow \mathscr{H}\big(h(K_v) - h(K_{v\,lim}) - c\big) = 0 \text{ ou } \boldsymbol{G} : \boldsymbol{D} < 0\right)$

  $\forall \boldsymbol{D},\ (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^{(c)}_{ref}) : \boldsymbol{D} \geqslant 0$

  $\exists \boldsymbol{f}\ \mid\ \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^{(c)}_{ref} + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{D},\cdots)$ où $\forall \boldsymbol{D},\ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{D},\cdots) : \boldsymbol{D} \geqslant 0$

- Continuité des contraintes sur la frontière : $\left(h(K_v) + c = h(K_{v\,lim})\right)$

  $[\partial_c \bar{f}_\psi]_{(h(K_v)+c=h(K_{v\,lim}))} = 0$ et $[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{D},\cdots)]_{(h(K_v)+c=h(K_{v\,lim}))} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{D},\cdots)$

- Finalement : $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^{(c)}_{ref} + \boldsymbol{\sigma}_d$ où $\forall \boldsymbol{D},\ \boldsymbol{\sigma}_d(\boldsymbol{D},\cdots) : \boldsymbol{D} \geqslant 0$

# Endommagement par cavitation (3/3)



**Dissipation intrinsèque :** $\forall \dot{T}\, \forall \boldsymbol{D},\ \Phi_{int} \geqslant 0$

$$-\rho\,(\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s)\,\dot{T} + (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_{ref}^{(c)}) : \boldsymbol{D} - \rho\,\partial_c \bar{f}_\psi\,\dot{c} \geqslant 0$$

$$-\rho\,(\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s)\,\dot{T} + \underbrace{(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_{ref}^{(c)}) : \boldsymbol{D} - \rho\,\partial_c \bar{f}_\psi\,\mathscr{H}\big(h(K_v) - h(K_{v\,lim}) - c\big)\,h'(K_v)\,K_v \langle \boldsymbol{G} : \boldsymbol{D}\rangle}_{\text{n'est pas fonction de } \dot{T}} \geqslant 0$$

**Relation de Helmholtz :** $\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s = 0$

**Comportement mécanique :**

- En évolution cavitante : $\left(\dot{c} > 0 \Leftrightarrow \mathscr{H}\big(h(K_v) - h(K_{v\,lim}) - c\big) = 1 \text{ et } \boldsymbol{G} : \boldsymbol{D} > 0\right)$

  $\forall \boldsymbol{D},\ \left(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_{ref}^{(c)} - \rho\,\partial_c \bar{f}_\psi\,h'(K_v)\,K_v\,\boldsymbol{G}\right) : \boldsymbol{D} \geqslant 0$

  $\exists \boldsymbol{g} \mid \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_{ref}^{(c)} + \rho\,\partial_c \bar{f}_\psi\,h'(K_v)\,K_v\,\boldsymbol{G} + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{D},\cdots)$ où $\forall \boldsymbol{D},\ \boldsymbol{g}(\boldsymbol{D},\cdots) : \boldsymbol{D} \geqslant 0$

- En évolution non cavitante : $\left(\dot{c} = 0 \Leftrightarrow \mathscr{H}\big(h(K_v) - h(K_{v\,lim}) - c\big) = 0 \text{ ou } \boldsymbol{G} : \boldsymbol{D} < 0\right)$

  $\forall \boldsymbol{D},\ (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_{ref}^{(c)}) : \boldsymbol{D} \geqslant 0$

  $\exists \boldsymbol{f} \mid \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_{ref}^{(c)} + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{D},\cdots)$ où $\forall \boldsymbol{D},\ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{D},\cdots) : \boldsymbol{D} \geqslant 0$

- Continuité des contraintes sur la frontière : $\left(h(K_v) + c = h(K_{v\,lim})\right)$

  $\left[\partial_c \bar{f}_\psi\right]_{(h(K_v)+c=h(K_{v\,lim}))} = 0$ et $\left[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{D},\cdots)\right]_{(h(K_v)+c=h(K_{v\,lim}))} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{D},\cdots)$

- Finalement : $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_{ref}^{(c)} + \boldsymbol{\sigma}_d$ où $\forall \boldsymbol{D},\ \boldsymbol{\sigma}_d(\boldsymbol{D},\cdots) : \boldsymbol{D} \geqslant 0$

  (la contrainte dissipative $\boldsymbol{\sigma}_d$ peut être choisie nulle)

# Endommagement par élongation (1/3)

# Endommagement par élongation (1/3)



Choix d'un critère macroscopique :

# Endommagement par élongation (1/3)



**Choix** d'un critère macroscopique :

$\lambda_1 \leq \lambda_{lim}$

# Endommagement par élongation (1/3)

## Choix d'un critère macroscopique :

$\lambda_1 \leq \lambda_{lim}$ où $\lambda_1$ est la plus grande dilatation linéique en la particule.

# Endommagement par élongation (1/3)



## Choix d'un critère macroscopique :

$\lambda_1 \leq \lambda_{lim}$ où $\lambda_1$ est la plus grande dilatation linéique en la particule.

## Choix d'une variable d'état mnésique :

# Endommagement par élongation (1/3)



## Choix d'un critère macroscopique :

$\lambda_1 \leq \lambda_{lim}$ où $\lambda_1$ est la plus grande dilatation linéique en la particule.

## Choix d'une variable d'état mnésique :

$$e(t) = \sup_{\tau \in [t_0\,;t]} \langle \lambda_1(\tau) - \lambda_{lim} \rangle$$

# Endommagement par élongation (1/3)



## Choix d'un critère macroscopique :

$\lambda_1 \leq \lambda_{lim}$ où $\lambda_1$ est la plus grande dilatation linéique en la particule.

## Choix d'une variable d'état mnésique :

$$e(t) = \sup_{\tau \in [t_0\,;t]} \langle \lambda_1(\tau) - \lambda_{lim} \rangle$$

(le plus grand dépassement de $\lambda_{lim}$ depuis $t_0$)

# Endommagement par élongation (1/3)



## Choix d'un critère macroscopique :

$\lambda_1 \leq \lambda_{lim}$ où $\lambda_1$ est la plus grande dilatation linéique en la particule.

## Choix d'une variable d'état mnésique :

$$e(t) = \sup_{\tau \in [t_0\,;t]} \langle \lambda_1(\tau) - \lambda_{lim} \rangle$$

(le plus grand dépassement de $\lambda_{lim}$ depuis $t_0$)

## Hypothèse simplificatrice :

$\lambda_{lim}$ indépendant de $T$.

# Endommagement par élongation (1/3)



## Choix d'un critère macroscopique :

$\lambda_1 \leq \lambda_{lim}$ où $\lambda_1$ est la plus grande dilatation linéique en la particule.

## Choix d'une variable d'état mnésique :

$$e(t) = \sup_{\tau \in [t_0\,;t]} \langle \lambda_1(\tau) - \lambda_{lim} \rangle$$

(le plus grand dépassement de $\lambda_{lim}$ depuis $t_0$)

## Hypothèse simplificatrice :

$\lambda_{lim}$ indépendant de $T$.

## Propriétés de la variable d'état mnésique $e(t)$ :

# Endommagement par élongation (1/3)



## Choix d'un critère macroscopique :

$\lambda_1 \leq \lambda_{lim}$ où $\lambda_1$ est la plus grande dilatation linéique en la particule.

## Choix d'une variable d'état mnésique :

$$e(t) = \sup_{\tau \in [t_0\,;t]} \langle \lambda_1(\tau) - \lambda_{lim} \rangle$$ (le plus grand dépassement de $\lambda_{lim}$ depuis $t_0$)

## Hypothèse simplificatrice : $\lambda_{lim}$ indépendant de $T$.

## Propriétés de la variable d'état mnésique $e(t)$ :

- $e(t)$ est une grandeur scalaire, objective, et non négative ;

# Endommagement par élongation (1/3)



## Choix d'un critère macroscopique :

$\lambda_1 \leq \lambda_{lim}$ où $\lambda_1$ est la plus grande dilatation linéique en la particule.

## Choix d'une variable d'état mnésique :

$$e(t) = \sup_{\tau \in [t_0\,; t]} \langle \lambda_1(\tau) - \lambda_{lim} \rangle$$

(le plus grand dépassement de $\lambda_{lim}$ depuis $t_0$)

## Hypothèse simplificatrice : $\lambda_{lim}$ indépendant de $T$.

## Propriétés de la variable d'état mnésique $e(t)$ :

- $e(t)$ est une grandeur scalaire, objective, et non négative ;
- Il y a un espace des états admissibles : $\lambda_1(t) \leq \lambda_{lim} + e(t)$

# Endommagement par élongation (1/3)



## Choix d'un critère macroscopique :

$\lambda_1 \leq \lambda_{lim}$ où $\lambda_1$ est la plus grande dilatation linéique en la particule.

## Choix d'une variable d'état mnésique :

$$e(t) = \sup_{\tau \in [t_0\,;t]} \langle \lambda_1(\tau) - \lambda_{lim} \rangle$$ (le plus grand dépassement de $\lambda_{lim}$ depuis $t_0$)

## Hypothèse simplificatrice : $\lambda_{lim}$ indépendant de $T$.

## Propriétés de la variable d'état mnésique $e(t)$ :

- $e(t)$ est une grandeur scalaire, objective, et non négative ;
- Il y a un espace des états admissibles : $\lambda_1(t) \leq \lambda_{lim} + e(t)$
- L'endommagement $e(t)$ ne peut pas diminuer : $\dot{e} \geqslant 0$

# Endommagement par élongation (1/3)



## Choix d'un critère macroscopique :

$\lambda_1 \leq \lambda_{lim}$ où $\lambda_1$ est la plus grande dilatation linéique en la particule.

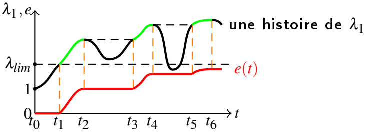
## Choix d'une variable d'état mnésique :

$$e(t) = \sup_{\tau \in [t_0\,; t]} \langle \lambda_1(\tau) - \lambda_{lim} \rangle$$ (le plus grand dépassement de $\lambda_{lim}$ depuis $t_0$)

## Hypothèse simplificatrice : $\lambda_{lim}$ indépendant de $T$.

## Propriétés de la variable d'état mnésique $e(t)$ :

- $e(t)$ est une grandeur scalaire, objective, et non négative ;
- Il y a un espace des états admissibles : $\lambda_1(t) \leq \lambda_{lim} + e(t)$
- L'endommagement $e(t)$ ne peut pas diminuer : $\dot{e} \geqslant 0$



# Endommagement par élongation (2/3)

# Endommagement par élongation (2/3)

## Rappel d'algèbre tensorielle :

# Endommagement par élongation (2/3)

## Rappel d'algèbre tensorielle :

$\lambda_1$ est une fonction des variables d'état cinématiques :

# Endommagement par élongation (2/3)



## Rappel d'algèbre tensorielle :

$\lambda_1$ est une fonction des variables d'état cinématiques :

$$\lambda_1{}^2 = \frac{2J}{3}\cos\frac{\varphi}{3} + \frac{B_{\mathrm{I}}}{3}$$

# Endommagement par élongation (2/3)



## Rappel d'algèbre tensorielle :

$\lambda_1$ est une fonction des variables d'état cinématiques :

$$\lambda_1{}^2 = \frac{2J}{3} \cos \frac{\varphi}{3} + \frac{B_\mathrm{I}}{3}$$

où : $$J = \sqrt{B_\mathrm{I}{}^2 - 3\,B_\mathrm{II}}$$

# Endommagement par élongation (2/3)



## Rappel d'algèbre tensorielle :

$\lambda_1$ est une fonction des variables d'état cinématiques :

$${\lambda_1}^2 = \frac{2J}{3} \cos \frac{\varphi}{3} + \frac{B_{\mathrm{I}}}{3}$$

où : $J = \sqrt{{B_{\mathrm{I}}}^2 - 3B_{\mathrm{II}}}$ et $\varphi = \mathrm{Arccos}\frac{27B_{\mathrm{III}} - 9B_{\mathrm{I}}B_{\mathrm{II}} + 2{B_{\mathrm{I}}}^3}{2J^3} \in [0;\pi]$

# Endommagement par élongation (2/3)



## Rappel d'algèbre tensorielle :

$\lambda_1$ est une fonction des variables d'état cinématiques :

$$\lambda_1{}^2 = \frac{2J}{3}\cos\frac{\varphi}{3} + \frac{B_\mathrm{I}}{3}$$

où : $J = \sqrt{B_\mathrm{I}{}^2 - 3\,B_\mathrm{II}}$ et $\varphi = \mathrm{Arccos}\,\frac{27\,B_\mathrm{III} - 9\,B_\mathrm{I}\,B_\mathrm{II} + 2\,B_\mathrm{I}{}^3}{2\,J^3} \in [0\,;\pi]$

## Une approximation simplificatrice :

# Endommagement par élongation (2/3)



## Rappel d'algèbre tensorielle :

$\lambda_1$ est une fonction des variables d'état cinématiques :

$$\lambda_1{}^2 = \frac{2J}{3}\cos\frac{\varphi}{3} + \frac{B_{\mathrm{I}}}{3}$$

où : $J = \sqrt{B_{\mathrm{I}}{}^2 - 3B_{\mathrm{II}}}$ et $\varphi = \mathrm{Arccos}\frac{27B_{\mathrm{III}} - 9B_{\mathrm{I}}B_{\mathrm{II}} + 2B_{\mathrm{I}}{}^3}{2J^3} \in [0;\pi]$

## Une approximation simplificatrice :

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \leq \cos\frac{\varphi}{3} \leq 1$$

# Endommagement par élongation (2/3)



## Rappel d'algèbre tensorielle :

$\lambda_1$ est une fonction des variables d'état cinématiques :

$$\lambda_1{}^2 = \frac{2J}{3}\cos\frac{\varphi}{3} + \frac{B_\mathrm{I}}{3}$$

où : $\quad J = \sqrt{B_\mathrm{I}{}^2 - 3B_\mathrm{II}} \quad$ et $\quad \varphi = \mathrm{Arccos}\frac{27B_\mathrm{III} - 9B_\mathrm{I}B_\mathrm{II} + 2B_\mathrm{I}{}^3}{2J^3} \in [0;\pi]$

## Une approximation simplificatrice :

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \leq \cos\frac{\varphi}{3} \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\sqrt{3}}{3}J + \frac{B_\mathrm{I}}{3} \leq \lambda_1{}^2 \leq \frac{2}{3}J + \frac{B_\mathrm{I}}{3}$$

# Endommagement par élongation (2/3)

## Rappel d'algèbre tensorielle :

$\lambda_1$ est une fonction des variables d'état cinématiques :

$$\lambda_1{}^2 = \frac{2J}{3}\cos\frac{\varphi}{3} + \frac{B_{\mathrm{I}}}{3}$$

où : $J = \sqrt{B_{\mathrm{I}}{}^2 - 3B_{\mathrm{II}}}$ et $\varphi = \mathrm{Arccos}\frac{27B_{\mathrm{III}} - 9B_{\mathrm{I}}B_{\mathrm{II}} + 2B_{\mathrm{I}}{}^3}{2J^3} \in [0;\pi]$

## Une approximation simplificatrice :

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \leq \cos\frac{\varphi}{3} \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\sqrt{3}}{3}J + \frac{B_{\mathrm{I}}}{3} \leq \lambda_1{}^2 \leq \frac{2}{3}J + \frac{B_{\mathrm{I}}}{3}$$

$$0.577\,J + \frac{B_{\mathrm{I}}}{3} \leq \lambda_1{}^2 \leq 0.667\,J + \frac{B_{\mathrm{I}}}{3}$$

# Endommagement par élongation (2/3)



## Rappel d'algèbre tensorielle :

$\lambda_1$ est une fonction des variables d'état cinématiques :

$$\lambda_1{}^2 = \frac{2J}{3}\cos\frac{\varphi}{3} + \frac{B_{\mathrm{I}}}{3}$$

où : $J = \sqrt{B_{\mathrm{I}}{}^2 - 3B_{\mathrm{II}}}$ et $\varphi = \mathrm{Arccos}\,\frac{27B_{\mathrm{III}} - 9B_{\mathrm{I}}B_{\mathrm{II}} + 2B_{\mathrm{I}}{}^3}{2J^3} \in [0;\pi]$

## Une approximation simplificatrice :

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \leq \cos\frac{\varphi}{3} \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\sqrt{3}}{3}J + \frac{B_{\mathrm{I}}}{3} \leq \lambda_1{}^2 \leq \frac{2}{3}J + \frac{B_{\mathrm{I}}}{3}$$

$$0.577\,J + \frac{B_{\mathrm{I}}}{3} \leq \lambda_1{}^2 \leq 0.667\,J + \frac{B_{\mathrm{I}}}{3}$$

$$\lambda_1{}^2 \simeq 0.622\sqrt{B_{\mathrm{I}}{}^2 - 3B_{\mathrm{II}}} + \frac{B_{\mathrm{I}}}{3}$$

# Endommagement par élongation (2/3)

Définition
Endom. par cavitation
Endom. par élongation

## Rappel d'algèbre tensorielle :

$\lambda_1$ est une fonction des variables d'état cinématiques :

$$\lambda_1{}^2 = \frac{2J}{3}\cos\frac{\varphi}{3} + \frac{B_{\mathrm{I}}}{3}$$

où : $\quad J = \sqrt{B_{\mathrm{I}}{}^2 - 3B_{\mathrm{II}}} \quad$ et $\quad \varphi = \mathrm{Arccos}\,\frac{27B_{\mathrm{III}} - 9B_{\mathrm{I}}B_{\mathrm{II}} + 2B_{\mathrm{I}}{}^3}{2J^3} \in [0;\pi]$

## Une approximation simplificatrice :

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \leq \cos\frac{\varphi}{3} \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\sqrt{3}}{3}J + \frac{B_{\mathrm{I}}}{3} \leq \lambda_1{}^2 \leq \frac{2}{3}J + \frac{B_{\mathrm{I}}}{3}$$

$$0.577\,J + \frac{B_{\mathrm{I}}}{3} \leq \lambda_1{}^2 \leq 0.667\,J + \frac{B_{\mathrm{I}}}{3}$$

$$\lambda_1{}^2 \simeq 0.622\sqrt{B_{\mathrm{I}}{}^2 - 3B_{\mathrm{II}}} + \frac{B_{\mathrm{I}}}{3}$$

(on peut aussi prendre $\lambda_1{}^2 \simeq \frac{2}{3}\sqrt{B_{\mathrm{I}}{}^2 - 3B_{\mathrm{II}}} + \frac{B_{\mathrm{I}}}{3}$ )

# Endommagement par élongation (2/3)



## Rappel d'algèbre tensorielle :

$\lambda_1$ est une fonction des variables d'état cinématiques :

$$\lambda_1{}^2 = \frac{2J}{3}\cos\frac{\varphi}{3} + \frac{B_\mathrm{I}}{3}$$

où : $J = \sqrt{B_\mathrm{I}{}^2 - 3\,B_\mathrm{II}}$ et $\varphi = \mathrm{Arccos}\,\frac{27\,B_\mathrm{III} - 9\,B_\mathrm{I}\,B_\mathrm{II} + 2\,B_\mathrm{I}{}^3}{2\,J^3} \in [0\,;\pi]$

## Une approximation simplificatrice :

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \le \cos\frac{\varphi}{3} \le 1 \quad\Rightarrow\quad \frac{\sqrt{3}}{3}J + \frac{B_\mathrm{I}}{3} \le \lambda_1{}^2 \le \frac{2}{3}J + \frac{B_\mathrm{I}}{3}$$

$$0.577\,J + \frac{B_\mathrm{I}}{3} \le \lambda_1{}^2 \le 0.667\,J + \frac{B_\mathrm{I}}{3}$$

$$\lambda_1{}^2 \simeq 0.622\,\sqrt{B_\mathrm{I}{}^2 - 3\,B_\mathrm{II}} + \frac{B_\mathrm{I}}{3}$$

(on peut aussi prendre $\lambda_1{}^2 \simeq \frac{2}{3}\,\sqrt{B_\mathrm{I}{}^2 - 3\,B_\mathrm{II}} + \frac{B_\mathrm{I}}{3}$ )

## Loi d'évolution :

# Endommagement par élongation (2/3)



## Rappel d'algèbre tensorielle :

$\lambda_1$ est une fonction des variables d'état cinématiques :

$$\lambda_1{}^2 = \frac{2J}{3}\cos\frac{\varphi}{3} + \frac{B_\mathrm{I}}{3}$$

où : $J = \sqrt{B_\mathrm{I}{}^2 - 3B_\mathrm{II}}$ et $\varphi = \mathrm{Arccos}\,\frac{27B_\mathrm{III} - 9B_\mathrm{I}B_\mathrm{II} + 2B_\mathrm{I}{}^3}{2J^3} \in [0;\pi]$

## Une approximation simplificatrice :

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \leq \cos\frac{\varphi}{3} \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\sqrt{3}}{3}J + \frac{B_\mathrm{I}}{3} \leq \lambda_1{}^2 \leq \frac{2}{3}J + \frac{B_\mathrm{I}}{3}$$

$$0.577\,J + \frac{B_\mathrm{I}}{3} \leq \lambda_1{}^2 \leq 0.667\,J + \frac{B_\mathrm{I}}{3}$$

$$\lambda_1{}^2 \simeq 0.622\sqrt{B_\mathrm{I}{}^2 - 3B_\mathrm{II}} + \frac{B_\mathrm{I}}{3}$$

(on peut aussi prendre $\lambda_1{}^2 \simeq \frac{2}{3}\sqrt{B_\mathrm{I}{}^2 - 3B_\mathrm{II}} + \frac{B_\mathrm{I}}{3}$)

## Loi d'évolution :

$$\dot{e} = \left\{ \right.$$

# Endommagement par élongation (2/3)



## Rappel d'algèbre tensorielle :

$\lambda_1$ est une fonction des variables d'état cinématiques :

$$\lambda_1{}^2 = \frac{2J}{3}\cos\frac{\varphi}{3} + \frac{B_\mathrm{I}}{3}$$

où : $J = \sqrt{B_\mathrm{I}{}^2 - 3B_\mathrm{II}}$ et $\varphi = \mathrm{Arccos}\,\frac{27B_\mathrm{III} - 9B_\mathrm{I}B_\mathrm{II} + 2B_\mathrm{I}{}^3}{2J^3} \in [0;\pi]$

## Une approximation simplificatrice :

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \leq \cos\frac{\varphi}{3} \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\sqrt{3}}{3}J + \frac{B_\mathrm{I}}{3} \leq \lambda_1{}^2 \leq \frac{2}{3}J + \frac{B_\mathrm{I}}{3}$$

$$0.577\,J + \frac{B_\mathrm{I}}{3} \leq \lambda_1{}^2 \leq 0.667\,J + \frac{B_\mathrm{I}}{3}$$

$$\lambda_1{}^2 \simeq 0.622\sqrt{B_\mathrm{I}{}^2 - 3B_\mathrm{II}} + \frac{B_\mathrm{I}}{3}$$

(on peut aussi prendre $\lambda_1{}^2 \simeq \frac{2}{3}\sqrt{B_\mathrm{I}{}^2 - 3B_\mathrm{II}} + \frac{B_\mathrm{I}}{3}$)

## Loi d'évolution :

$$\dot{e} = \begin{cases} \langle \dot{\lambda}_1 \rangle & \text{si } \lambda_1 - e = \lambda_{lim} \\ & \end{cases}$$

# Endommagement par élongation (2/3)

Définition
Endom. par cavitation
Endom. par élongation

## Rappel d'algèbre tensorielle :

$\lambda_1$ est une fonction des variables d'état cinématiques :

$$\lambda_1{}^2 = \frac{2J}{3}\cos\frac{\varphi}{3} + \frac{B_\mathrm{I}}{3}$$

où : $\quad J = \sqrt{B_\mathrm{I}{}^2 - 3\,B_\mathrm{II}} \quad$ et $\quad \varphi = \mathrm{Arccos}\,\frac{27\,B_\mathrm{III} - 9\,B_\mathrm{I}\,B_\mathrm{II} + 2\,B_\mathrm{I}{}^3}{2\,J^3} \in [0\,;\pi]$

## Une approximation simplificatrice :

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \le \cos\frac{\varphi}{3} \le 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\sqrt{3}}{3}J + \frac{B_\mathrm{I}}{3} \le \lambda_1{}^2 \le \frac{2}{3}J + \frac{B_\mathrm{I}}{3}$$

$$0.577\,J + \frac{B_\mathrm{I}}{3} \le \lambda_1{}^2 \le 0.667\,J + \frac{B_\mathrm{I}}{3}$$

$$\lambda_1{}^2 \simeq 0.622\,\sqrt{B_\mathrm{I}{}^2 - 3\,B_\mathrm{II}} + \frac{B_\mathrm{I}}{3}$$

(on peut aussi prendre $\lambda_1{}^2 \simeq \frac{2}{3}\sqrt{B_\mathrm{I}{}^2 - 3\,B_\mathrm{II}} + \frac{B_\mathrm{I}}{3}$ )

## Loi d'évolution :

$$\dot{e} = \begin{cases} \langle \dot{\lambda}_1 \rangle & \text{si } \lambda_1 - e = \lambda_{lim} \end{cases}$$

(état actuel sur la frontière des états admissibles)

# Endommagement par élongation (2/3)



## Rappel d'algèbre tensorielle :

$\lambda_1$ est une fonction des variables d'état cinématiques :

$$\lambda_1{}^2 = \frac{2J}{3}\cos\frac{\varphi}{3} + \frac{B_\mathrm{I}}{3}$$

où : $J = \sqrt{B_\mathrm{I}{}^2 - 3\,B_\mathrm{II}}$ et $\varphi = \mathrm{Arccos}\,\frac{27\,B_\mathrm{III} - 9\,B_\mathrm{I}\,B_\mathrm{II} + 2\,B_\mathrm{I}{}^3}{2\,J^3} \in [0\,;\pi]$

## Une approximation simplificatrice :

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \leq \cos\frac{\varphi}{3} \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\sqrt{3}}{3}J + \frac{B_\mathrm{I}}{3} \leq \lambda_1{}^2 \leq \frac{2}{3}J + \frac{B_\mathrm{I}}{3}$$

$$0.577\,J + \frac{B_\mathrm{I}}{3} \leq \lambda_1{}^2 \leq 0.667\,J + \frac{B_\mathrm{I}}{3}$$

$$\lambda_1{}^2 \simeq 0.622\sqrt{B_\mathrm{I}{}^2 - 3\,B_\mathrm{II}} + \frac{B_\mathrm{I}}{3}$$

(on peut aussi prendre $\lambda_1{}^2 \simeq \frac{2}{3}\sqrt{B_\mathrm{I}{}^2 - 3\,B_\mathrm{II}} + \frac{B_\mathrm{I}}{3}$)

## Loi d'évolution :

$$\dot{e} = \begin{cases} \langle \dot{\lambda}_1 \rangle & \text{si } \lambda_1 - e = \lambda_{lim} \\ 0 & \text{si } \lambda_1 - e < \lambda_{lim} \end{cases}$$

(état actuel sur la frontière des états admissibles)

# Endommagement par élongation (2/3)



## Rappel d'algèbre tensorielle :

$\lambda_1$ est une fonction des variables d'état cinématiques :

$$\lambda_1{}^2 = \frac{2J}{3}\cos\frac{\varphi}{3} + \frac{B_\mathrm{I}}{3}$$

où : $J = \sqrt{B_\mathrm{I}{}^2 - 3\,B_\mathrm{II}}$ et $\varphi = \mathrm{Arccos}\,\frac{27\,B_\mathrm{III} - 9\,B_\mathrm{I}\,B_\mathrm{II} + 2\,B_\mathrm{I}{}^3}{2\,J^3} \in [0\,;\pi]$

## Une approximation simplificatrice :

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \leq \cos\frac{\varphi}{3} \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\sqrt{3}}{3}J + \frac{B_\mathrm{I}}{3} \leq \lambda_1{}^2 \leq \frac{2}{3}J + \frac{B_\mathrm{I}}{3}$$

$$0.577\,J + \frac{B_\mathrm{I}}{3} \leq \lambda_1{}^2 \leq 0.667\,J + \frac{B_\mathrm{I}}{3}$$

$$\lambda_1{}^2 \simeq 0.622\,\sqrt{B_\mathrm{I}{}^2 - 3\,B_\mathrm{II}} + \frac{B_\mathrm{I}}{3}$$

(on peut aussi prendre $\lambda_1{}^2 \simeq \frac{2}{3}\,\sqrt{B_\mathrm{I}{}^2 - 3\,B_\mathrm{II}} + \frac{B_\mathrm{I}}{3}$ )

## Loi d'évolution :

$$\dot{e} = \begin{cases} \langle \dot{\lambda}_1 \rangle & \text{si } \lambda_1 - e = \lambda_{lim} \\ 0 & \text{si } \lambda_1 - e < \lambda_{lim} \end{cases}$$

(état actuel sur la frontière des états admissibles)
(état actuel à l'intérieur des états admissibles)

# Endommagement par élongation (2/3)



## Rappel d'algèbre tensorielle :

$\lambda_1$ est une fonction des variables d'état cinématiques :

$$\lambda_1{}^2 = \frac{2J}{3}\cos\frac{\varphi}{3} + \frac{B_{\mathrm{I}}}{3}$$

où : $J = \sqrt{B_{\mathrm{I}}{}^2 - 3B_{\mathrm{II}}}$ et $\varphi = \mathrm{Arccos}\frac{27B_{\mathrm{III}} - 9B_{\mathrm{I}}B_{\mathrm{II}} + 2B_{\mathrm{I}}{}^3}{2J^3} \in [0;\pi]$

## Une approximation simplificatrice :

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \leq \cos\frac{\varphi}{3} \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\sqrt{3}}{3}J + \frac{B_{\mathrm{I}}}{3} \leq \lambda_1{}^2 \leq \frac{2}{3}J + \frac{B_{\mathrm{I}}}{3}$$

$$0.577\,J + \frac{B_{\mathrm{I}}}{3} \leq \lambda_1{}^2 \leq 0.667\,J + \frac{B_{\mathrm{I}}}{3}$$

$$\lambda_1{}^2 \simeq 0.622\sqrt{B_{\mathrm{I}}{}^2 - 3B_{\mathrm{II}}} + \frac{B_{\mathrm{I}}}{3}$$

(on peut aussi prendre $\lambda_1{}^2 \simeq \frac{2}{3}\sqrt{B_{\mathrm{I}}{}^2 - 3B_{\mathrm{II}}} + \frac{B_{\mathrm{I}}}{3}$ )

## Loi d'évolution :

$$\dot{e} = \begin{cases} \langle \dot{\lambda}_1 \rangle & \text{si } \lambda_1 - e = \lambda_{lim} \\ 0 & \text{si } \lambda_1 - e < \lambda_{lim} \end{cases}$$

(état actuel sur la frontière des états admissibles)

(état actuel à l'intérieur des états admissibles)

avec $$\dot{\lambda}_1 \simeq \underbrace{\frac{1}{2\lambda_1}\left(\frac{1}{3} + \frac{0.622\,B_{\mathrm{I}}}{\sqrt{B_{\mathrm{I}}{}^2 - 3B_{\mathrm{II}}}}\right)}_{K_1}\dot{B}_{\mathrm{I}} - \underbrace{\frac{3}{4\lambda_1}\,\frac{0.622}{\sqrt{B_{\mathrm{I}}{}^2 - 3B_{\mathrm{II}}}}}_{K_2}\dot{B}_{\mathrm{II}}$$

# Endommagement par élongation (2/3)



## Rappel d'algèbre tensorielle :

$\lambda_1$ est une fonction des variables d'état cinématiques :

$$\lambda_1{}^2 = \frac{2J}{3}\cos\frac{\varphi}{3} + \frac{B_\mathrm{I}}{3}$$

où : $J = \sqrt{B_\mathrm{I}{}^2 - 3\,B_\mathrm{II}}$ et $\varphi = \mathrm{Arccos}\,\frac{27\,B_\mathrm{III} - 9\,B_\mathrm{I}\,B_\mathrm{II} + 2\,B_\mathrm{I}{}^3}{2\,J^3} \in [0\,;\pi]$

## Une approximation simplificatrice :

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \leq \cos\frac{\varphi}{3} \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\sqrt{3}}{3}J + \frac{B_\mathrm{I}}{3} \leq \lambda_1{}^2 \leq \frac{2}{3}J + \frac{B_\mathrm{I}}{3}$$

$$0.577\,J + \frac{B_\mathrm{I}}{3} \leq \lambda_1{}^2 \leq 0.667\,J + \frac{B_\mathrm{I}}{3}$$

$$\lambda_1{}^2 \simeq 0.622\sqrt{B_\mathrm{I}{}^2 - 3\,B_\mathrm{II}} + \frac{B_\mathrm{I}}{3}$$

(on peut aussi prendre $\lambda_1{}^2 \simeq \frac{2}{3}\sqrt{B_\mathrm{I}{}^2 - 3\,B_\mathrm{II}} + \frac{B_\mathrm{I}}{3}$)

## Loi d'évolution :

$$\dot{e} = \begin{cases} \langle\dot{\lambda}_1\rangle & \text{si } \lambda_1 - e = \lambda_{lim} \\ 0 & \text{si } \lambda_1 - e < \lambda_{lim} \end{cases}$$

(état actuel sur la frontière des états admissibles)
(état actuel à l'intérieur des états admissibles)

avec $\dot{\lambda}_1 \simeq \underbrace{\frac{1}{2\lambda_1}\left(\frac{1}{3} + \frac{0.622\,B_\mathrm{I}}{\sqrt{B_\mathrm{I}{}^2 - 3\,B_\mathrm{II}}}\right)}_{K_1}\dot{B}_\mathrm{I} - \underbrace{\frac{3}{4\,\lambda_1}\,\frac{0.622}{\sqrt{B_\mathrm{I}{}^2 - 3\,B_\mathrm{II}}}}_{K_2}\dot{B}_\mathrm{II}$

Remarque : Dans ce modèle d'endommagement, l'invariant $B_\mathrm{II}$ intervient nécessairement dans les variables d'état cinématiques.

# Endommagement par élongation (3/3)

# Endommagement par élongation (3/3)

L'inégalité $\forall \dot{T}\ \forall \boldsymbol{D},\ \Phi_{int} \geqslant 0$ implique :

# Endommagement par élongation (3/3)



L'inégalité $\forall \dot{T} \, \forall \boldsymbol{D}, \;\; \Phi_{int} \geqslant 0$ implique : (raisonnement habituel)

# Endommagement par élongation (3/3)



L'inégalité $\forall \dot{T}\, \forall \boldsymbol{D},\ \Phi_{int} \geqslant 0$ implique : (raisonnement habituel)

## Relation de Helmholtz :

$$\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s = 0$$

# Endommagement par élongation (3/3)



L'inégalité $\forall \dot{T}\, \forall \boldsymbol{D},\ \Phi_{int} \geqslant 0$ implique : (raisonnement habituel)

## Relation de Helmholtz :

$$\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s = 0$$

## Comportement mécanique :

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^{(e)}_{ref} + \boldsymbol{\sigma}_d$$

# Endommagement par élongation (3/3)



L'inégalité $\forall \dot{T}\, \forall \boldsymbol{D},\ \Phi_{int} \geqslant 0$ implique : (raisonnement habituel)

## Relation de Helmholtz :

$$\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s = 0$$

## Comportement mécanique :

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_{ref}^{(e)} + \boldsymbol{\sigma}_d$$

où : $\boldsymbol{\sigma}_{ref}^{(e)} = \frac{\rho_0}{K_v} \sum_{j=1}^{m} \partial_{I_j} \bar{f}_\psi \boldsymbol{S}_j$

# Endommagement par élongation (3/3)



L'inégalité $\forall \dot{T}\, \forall \boldsymbol{D},\ \Phi_{int} \geqslant 0$ implique : (raisonnement habituel)

## Relation de Helmholtz :

$$\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s = 0$$

## Comportement mécanique :

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^{(e)}_{ref} + \boldsymbol{\sigma}_d$$

où : $\boldsymbol{\sigma}^{(e)}_{ref} = \frac{\rho_0}{K_v} \sum_{j=1}^{m} \partial_{I_j} \bar{f}_\psi \boldsymbol{S}_j$ et $\forall \boldsymbol{D},\ \boldsymbol{\sigma}_d : \boldsymbol{D} \geqslant 0$

# Endommagement par élongation (3/3)



L'inégalité $\forall \dot{T}\, \forall \boldsymbol{D},\ \Phi_{int} \geqslant 0$ implique : (raisonnement habituel)

## Relation de Helmholtz :

$$\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s = 0$$

## Comportement mécanique :

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^{(e)}_{ref} + \boldsymbol{\sigma}_d$$

où : $\boldsymbol{\sigma}^{(e)}_{ref} = \frac{\rho_0}{K_v} \sum_{j=1}^{m} \partial_{I_j} \bar{f}_\psi \boldsymbol{S}_j$ et $\forall \boldsymbol{D},\ \boldsymbol{\sigma}_d : \boldsymbol{D} \geqslant 0$

## Continuité des contraintes à la frontière :

$$\left[\partial_e \bar{f}_\psi\right]_{(\lambda_1 = \lambda_{lim} + e)} = 0$$

# Endommagement par élongation (3/3)



L'inégalité $\forall \dot{T}\, \forall \boldsymbol{D},\ \Phi_{int} \geqslant 0$ implique : (raisonnement habituel)

## Relation de Helmholtz :

$$\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s = 0$$

## Comportement mécanique :

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^{(e)}_{ref} + \boldsymbol{\sigma}_d$$

où : $\boldsymbol{\sigma}^{(e)}_{ref} = \frac{\rho_0}{K_v} \sum_{j=1}^{m} \partial_{I_j} \bar{f}_\psi \boldsymbol{S}_j$ et $\forall \boldsymbol{D},\ \boldsymbol{\sigma}_d : \boldsymbol{D} \geqslant 0$

## Continuité des contraintes à la frontière :

$\left[\partial_e \bar{f}_\psi\right]_{(\lambda_1 = \lambda_{lim} + e)} = 0$ et $\boldsymbol{\sigma}_d$ continu à la frontière.

# Endommagement par élongation (3/3)



L'inégalité $\forall \dot{T}\, \forall \boldsymbol{D},\ \Phi_{int} \geqslant 0$ implique : (raisonnement habituel)

## Relation de Helmholtz :

$$\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s = 0$$

## Comportement mécanique :

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^{(e)}_{ref} + \boldsymbol{\sigma}_d$$

où : $\boldsymbol{\sigma}^{(e)}_{ref} = \frac{\rho_0}{K_v} \sum_{j=1}^{m} \partial_{I_j} \bar{f}_\psi \boldsymbol{S}_j$ et $\forall \boldsymbol{D},\ \boldsymbol{\sigma}_d : \boldsymbol{D} \geqslant 0$

## Continuité des contraintes à la frontière :

$\left[\partial_e \bar{f}_\psi\right]_{(\lambda_1 = \lambda_{lim} + e)} = 0$ et $\boldsymbol{\sigma}_d$ continu à la frontière.

Il reste à construire une expression physiquement sensée de l'énergie libre massique de Helmholtz $\bar{f}_\psi(T, \{I_\bullet\}, e)$.

Sixième partie

# Conclusion sur les modèles à une seule variable d'état mnésique

# Modèles à une variable d'état mnésique

# Modèles à une variable d'état mnésique

- Une seule variable d'état mnésique $\alpha$

# Modèles à une variable d'état mnésique

- Une seule variable d'état mnésique $\alpha$ scalaire

# Modèles à une variable d'état mnésique

- Une seule variable d'état mnésique $\alpha$ scalaire et objective.

# Modèles à une variable d'état mnésique

- Une seule variable d'état mnésique $\alpha$ scalaire et objective. ($\alpha$ est l'histoire macroscopique

# Modèles à une variable d'état mnésique

- Une seule variable d'état mnésique $\alpha$ scalaire et objective.
  ($\alpha$ est l'histoire macroscopique de phénomènes microscopiques).

# Modèles à une variable d'état mnésique

- Une seule variable d'état mnésique $\alpha$ scalaire et objective.
  ($\alpha$ est l'histoire macroscopique de phénomènes microscopiques).
- La loi d'évolution $\dot{\alpha}$

# Modèles à une variable d'état mnésique

- Une seule variable d'état mnésique $\alpha$ scalaire et objective.
  ($\alpha$ est l'histoire macroscopique de phénomènes microscopiques).
- La loi d'évolution $\dot{\alpha}$ se déduit de la définition de $\alpha$.

# Modèles à une variable d'état mnésique

- Une seule variable d'état mnésique $\alpha$ scalaire et objective. ($\alpha$ est l'histoire macroscopique de phénomènes microscopiques).
- La loi d'évolution $\dot{\alpha}$ se déduit de la définition de $\alpha$.
- Les modèles sont souvent « à seuil »,

# Modèles à une variable d'état mnésique

- Une seule variable d'état mnésique $\alpha$ scalaire et objective.
  ($\alpha$ est l'histoire macroscopique de phénomènes microscopiques).
- La loi d'évolution $\dot{\alpha}$ se déduit de la définition de $\alpha$.
- Les modèles sont souvent « à seuil », mais on peut le supprimer.

# Modèles à une variable d'état mnésique

- Une seule variable d'état mnésique $\alpha$ scalaire et objective.
  ($\alpha$ est l'histoire macroscopique de phénomènes microscopiques).
- La loi d'évolution $\dot{\alpha}$ se déduit de la définition de $\alpha$.
- Les modèles sont souvent « à seuil », mais on peut le supprimer.
- Quand le seuil est indépendant des anisotropies,
  ces modèles sont valables quelles que soient les anisotropies.

# Modèles à une variable d'état mnésique

- Une seule variable d'état mnésique $\alpha$ scalaire et objective.
  ($\alpha$ est l'histoire macroscopique de phénomènes microscopiques).
- La loi d'évolution $\dot{\alpha}$ se déduit de la définition de $\alpha$.
- Les modèles sont souvent « à seuil », mais on peut le supprimer.
- Quand le seuil est indépendant des anisotropies,
  ces modèles sont valables quelles que soient les anisotropies.
- Énergie libre massique de Helmholtz : $\bar{f}_\psi(T, I_1, \cdots, I_m, \alpha)$

# Modèles à une variable d'état mnésique

- Une seule variable d'état mnésique $\alpha$ scalaire et objective.
  ($\alpha$ est l'histoire macroscopique de phénomènes microscopiques).
- La loi d'évolution $\dot{\alpha}$ se déduit de la définition de $\alpha$.
- Les modèles sont souvent « à seuil », mais on peut le supprimer.
- Quand le seuil est indépendant des anisotropies,
  ces modèles sont valables quelles que soient les anisotropies.
- Énergie libre massique de Helmholtz : $\bar{f}_\psi(T, I_1, \cdots, I_m, \alpha)$
- Il existe un espace des états admissibles (une partie de $\mathbb{R}^{m+2}$).

# Modèles à une variable d'état mnésique

- Une seule variable d'état mnésique $\alpha$ scalaire et objective. ($\alpha$ est l'histoire macroscopique de phénomènes microscopiques).
- La loi d'évolution $\dot{\alpha}$ se déduit de la définition de $\alpha$.
- Les modèles sont souvent « à seuil », mais on peut le supprimer.
- Quand le seuil est indépendant des anisotropies, ces modèles sont valables quelles que soient les anisotropies.
- Énergie libre massique de Helmholtz : $\bar{f}_\psi(T, I_1, \cdots, I_m, \alpha)$
- Il existe un espace des états admissibles (une partie de $\mathbb{R}^{m+2}$).
- $\boldsymbol{\sigma} = \underbrace{\frac{\rho_0}{K_v} \sum_{j=1}^{m} \partial_{i_j} \bar{f}_\psi \boldsymbol{S}_j}_{\boldsymbol{\sigma}_{ref}^{(\alpha)}} + \boldsymbol{\sigma}_d(\boldsymbol{D}, \cdots)$

# Modèles à une variable d'état mnésique

- Une seule variable d'état mnésique $\alpha$ scalaire et objective.
  ($\alpha$ est l'histoire macroscopique de phénomènes microscopiques).
- La loi d'évolution $\dot{\alpha}$ se déduit de la définition de $\alpha$.
- Les modèles sont souvent « à seuil », mais on peut le supprimer.
- Quand le seuil est indépendant des anisotropies,
  ces modèles sont valables quelles que soient les anisotropies.
- Énergie libre massique de Helmholtz : $\bar{f}_\psi(T, I_1, \cdots, I_m, \alpha)$
- Il existe un espace des états admissibles (une partie de $\mathbb{R}^{m+2}$).
- $\boldsymbol{\sigma} = \underbrace{\frac{\rho_0}{K_v}\sum_{j=1}^{m} \partial_{i_j}\bar{f}_\psi \boldsymbol{S}_j}_{\boldsymbol{\sigma}_{ref}^{(\alpha)}} + \boldsymbol{\sigma}_d(\boldsymbol{D}, \cdots)$ avec $\forall \boldsymbol{D},\ \underbrace{\boldsymbol{\sigma}_d(\boldsymbol{D}, \cdots) : \boldsymbol{D}}_{\Phi_{int}} \geqslant 0$

# Modèles à une variable d'état mnésique

- Une seule variable d'état mnésique $\alpha$ scalaire et objective.
  ($\alpha$ est l'histoire macroscopique de phénomènes microscopiques).
- La loi d'évolution $\dot{\alpha}$ se déduit de la définition de $\alpha$.
- Les modèles sont souvent « à seuil », mais on peut le supprimer.
- Quand le seuil est indépendant des anisotropies,
  ces modèles sont valables quelles que soient les anisotropies.
- Énergie libre massique de Helmholtz : $\bar{f}_\psi(T, I_1, \cdots, I_m, \alpha)$
- Il existe un espace des états admissibles (une partie de $\mathbb{R}^{m+2}$).
- $\boldsymbol{\sigma} = \underbrace{\frac{\rho_0}{K_v} \sum_{j=1}^{m} \partial_{i_j} \bar{f}_\psi \boldsymbol{S}_j}_{\boldsymbol{\sigma}_{ref}^{(\alpha)}} + \boldsymbol{\sigma}_d(\boldsymbol{D}, \cdots)$ avec $\forall \boldsymbol{D},\ \underbrace{\boldsymbol{\sigma}_d(\boldsymbol{D}, \cdots) : \boldsymbol{D}}_{\Phi_{int}} \geqslant 0$
- Continuité des contraintes sur la frontière des états admissibles :
  $[\partial_\alpha \bar{f}_\psi]_{\text{(sur la frontière)}} = 0$,

# Modèles à une variable d'état mnésique

- Une seule variable d'état mnésique $\alpha$ scalaire et objective.
  ($\alpha$ est l'histoire macroscopique de phénomènes microscopiques).
- La loi d'évolution $\dot{\alpha}$ se déduit de la définition de $\alpha$.
- Les modèles sont souvent « à seuil », mais on peut le supprimer.
- Quand le seuil est indépendant des anisotropies,
  ces modèles sont valables quelles que soient les anisotropies.
- Énergie libre massique de Helmholtz : $\bar{f}_\psi(T, I_1, \cdots, I_m, \alpha)$
- Il existe un espace des états admissibles (une partie de $\mathbb{R}^{m+2}$).
- $\boldsymbol{\sigma} = \underbrace{\frac{\rho_0}{K_v} \sum_{j=1}^{m} \partial_{i_j} \bar{f}_\psi \boldsymbol{S}_j}_{\boldsymbol{\sigma}_{ref}^{(\alpha)}} + \boldsymbol{\sigma}_d(\boldsymbol{D}, \cdots)$ avec $\forall \boldsymbol{D},\ \underbrace{\boldsymbol{\sigma}_d(\boldsymbol{D}, \cdots) : \boldsymbol{D}}_{\Phi_{int}} \geqslant 0$
- Continuité des contraintes sur la frontière des états admissibles :
  $[\partial_\alpha \bar{f}_\psi]_{(\text{sur la frontière})} = 0$, et continuité de $\boldsymbol{\sigma}_d$.

# Modèles à une variable d'état mnésique

- Une seule variable d'état mnésique $\alpha$ scalaire et objective.
  ($\alpha$ est l'histoire macroscopique de phénomènes microscopiques).
- La loi d'évolution $\dot{\alpha}$ se déduit de la définition de $\alpha$.
- Les modèles sont souvent « à seuil », mais on peut le supprimer.
- Quand le seuil est indépendant des anisotropies,
  ces modèles sont valables quelles que soient les anisotropies.
- Énergie libre massique de Helmholtz : $\bar{f}_\psi(T, I_1, \cdots, I_m, \alpha)$
- Il existe un espace des états admissibles (une partie de $\mathbb{R}^{m+2}$).
- $\boldsymbol{\sigma} = \underbrace{\frac{\rho_0}{K_v} \sum_{j=1}^{m} \partial_{i_j} \bar{f}_\psi \boldsymbol{S}_j}_{\boldsymbol{\sigma}_{ref}^{(\alpha)}} + \boldsymbol{\sigma}_d(\boldsymbol{D}, \cdots)$ avec $\forall \boldsymbol{D},\ \underbrace{\boldsymbol{\sigma}_d(\boldsymbol{D}, \cdots) : \boldsymbol{D}}_{\Phi_{int}} \geqslant 0$
- Continuité des contraintes sur la frontière des états admissibles :
  $[\partial_\alpha \bar{f}_\psi]_{(\text{sur la frontière})} = 0$, et continuité de $\boldsymbol{\sigma}_d$.
- L'expression de l'énergie libre massique de Helmholtz
  $\bar{f}_\psi(T, \{\boldsymbol{I}_\bullet\}, \alpha)$ doit être physiquement sensée.

Septième partie

# Inélasticité à plusieurs variables d'état mnésiques

# Variables d'état

# Variables d'état



## Objectif :

Améliorer la représentation macroscopique des phénomènes microscopiques.

# Variables d'état



## Objectif :

Améliorer la représentation macroscopique des phénomènes microscopiques.

Exemples :

# Variables d'état



## Objectif :

Améliorer la représentation macroscopique des phénomènes microscopiques.

Exemples :

- solides plastifiables et endommageables ;

# Variables d'état



## Objectif :

Améliorer la représentation macroscopique des phénomènes microscopiques.

### Exemples :

- solides plastifiables et endommageables ; (deux scalaires $p$ et $c$)

# Variables d'état

## Objectif :

Améliorer la représentation macroscopique des phénomènes microscopiques.

### Exemples :

- solides plastifiables et endommageables ; (deux scalaires $p$ et $c$)
- représentation d'une microfissure par un vecteur mnésique.

# Variables d'état



## Objectif :

Améliorer la représentation macroscopique des phénomènes microscopiques.

### Exemples :

- solides plastifiables et endommageables ; (deux scalaires $p$ et $c$)
- représentation d'une microfissure par un vecteur mnésique.
  ($\tilde{v}$ unitaire : orientation de la fissure

# Variables d'état



## Objectif :

Améliorer la représentation macroscopique des phénomènes microscopiques.

### Exemples :

- solides plastifiables et endommageables ; (deux scalaires $p$ et $c$)
- représentation d'une microfissure par un vecteur mnésique.
  ($\widetilde{v}$ unitaire : orientation de la fissure et éventuellement une « intensité » de la fissure $\|v\|$)

# Variables d'état



## Objectif :

Améliorer la représentation macroscopique des phénomènes microscopiques.

Exemples :

- solides plastifiables et endommageables ; (deux scalaires $p$ et $c$)
- représentation d'une microfissure par un vecteur mnésique.
  ($\widetilde{v}$ unitaire : orientation de la fissure et éventuellement une « intensité » de la fissure $\|v\|$)

## Variables d'état tensorielles objectives **indépendantes** :

# Variables d'état



## Objectif :

Améliorer la représentation macroscopique des phénomènes microscopiques.

### Exemples :

- solides plastifiables et endommageables ; (deux scalaires $p$ et $c$)
- représentation d'une microfissure par un vecteur mnésique.
  ($\widetilde{v}$ unitaire : orientation de la fissure et éventuellement une « intensité » de la fissure $\|v\|$)

## Variables d'état tensorielles objectives indépendantes :

- La température $T$

# Variables d'état



## Objectif :

Améliorer la représentation macroscopique des phénomènes microscopiques.

Exemples :

- solides plastifiables et endommageables ; (deux scalaires $p$ et $c$)
- représentation d'une microfissure par un vecteur mnésique.
  ($\widetilde{v}$ unitaire : orientation de la fissure et éventuellement une « intensité » de la fissure $\|v\|$)

## Variables d'état tensorielles objectives indépendantes :

- La température $T$ (thermodynamique)

# Variables d'état



## Objectif :

Améliorer la représentation macroscopique des phénomènes microscopiques.

Exemples :

- solides plastifiables et endommageables ; (deux scalaires $p$ et $c$)
- représentation d'une microfissure par un vecteur mnésique.
  ($\widetilde{v}$ unitaire : orientation de la fissure et éventuellement une « intensité » de la fissure $\|v\|$)

## Variables d'état tensorielles objectives indépendantes :

- La température $T$ (thermodynamique)
- Variables d'état cinématiques : $\{\boldsymbol{X}, \{\boldsymbol{N}_t^\bullet\}\}$

# Variables d'état



## Objectif :

Améliorer la représentation macroscopique des phénomènes microscopiques.

### Exemples :

- solides plastifiables et endommageables ; (deux scalaires $p$ et $c$)
- représentation d'une microfissure par un vecteur mnésique.
  ($\widetilde{v}$ unitaire : orientation de la fissure et éventuellement une « intensité » de la fissure $\|v\|$)

## Variables d'état tensorielles objectives indépendantes :

- La température $T$ (thermodynamique)
- Variables d'état cinématiques : $\{\boldsymbol{X}, \{\boldsymbol{N}_t^\bullet\}\}$ (solide déformable anisotrope)

# Variables d'état



## Objectif :

Améliorer la représentation macroscopique des phénomènes microscopiques.

### Exemples :

- solides plastifiables et endommageables ; (deux scalaires $p$ et $c$)
- représentation d'une microfissure par un vecteur mnésique.
  ($\widetilde{v}$ unitaire : orientation de la fissure et éventuellement une « intensité » de la fissure $\|v\|$)

## Variables d'état tensorielles objectives indépendantes :

- La température $T$ (thermodynamique)
- Variables d'état cinématiques : $\{\boldsymbol{X}, \{\boldsymbol{N}_t^\bullet\}\}$ (solide déformable anisotrope)
- Variables d'état mnésiques tensorielles : $\{\boldsymbol{\alpha}^\bullet\}$

# Variables d'état



## Objectif :

Améliorer la représentation macroscopique des phénomènes microscopiques.

### Exemples :

- solides plastifiables et endommageables ; (deux scalaires $p$ et $c$)
- représentation d'une microfissure par un vecteur mnésique.
  ($\widetilde{v}$ unitaire : orientation de la fissure et éventuellement une « intensité » de la fissure $\|v\|$)

## Variables d'état tensorielles objectives indépendantes :

- La température $T$ (thermodynamique)
- Variables d'état cinématiques : $\{\boldsymbol{X}, \{\boldsymbol{N}_t^\bullet\}\}$ (solide déformable anisotrope)
- Variables d'état mnésiques tensorielles : $\{\boldsymbol{\alpha}^\bullet\}$ (d'ordre 0 ou plus)

# Variables d'état

Variables d'état

Construction d'un modèle

## Objectif :

Améliorer la représentation macroscopique des phénomènes microscopiques.

Exemples :

- solides plastifiables et endommageables ; (deux scalaires $p$ et $c$)
- représentation d'une microfissure par un vecteur mnésique.
  ($\widetilde{v}$ unitaire : orientation de la fissure et éventuellement une « intensité » de la fissure $\|v\|$)

## Variables d'état tensorielles objectives indépendantes :

- La température $T$ (thermodynamique)
- Variables d'état cinématiques : $\{\boldsymbol{X}, \{\boldsymbol{N}_t^\bullet\}\}$ (solide déformable anisotrope)
- Variables d'état mnésiques tensorielles : $\{\boldsymbol{\alpha}^\bullet\}$ (d'ordre 0 ou plus)

## Variables d'état scalaires indépendantes :

# Variables d'état



## Objectif :

Améliorer la représentation macroscopique des phénomènes microscopiques.

Exemples :

- solides plastifiables et endommageables ; (deux scalaires $p$ et $c$)
- représentation d'une microfissure par un vecteur mnésique.
  ($\widetilde{v}$ unitaire : orientation de la fissure et éventuellement une « intensité » de la fissure $\|v\|$)

## Variables d'état tensorielles objectives indépendantes :

- La température $T$ (thermodynamique)
- Variables d'état cinématiques : $\{\boldsymbol{X}, \{\boldsymbol{N}_t^\bullet\}\}$ (solide déformable anisotrope)
- Variables d'état mnésiques tensorielles : $\{\boldsymbol{\alpha}^\bullet\}$ (d'ordre 0 ou plus)

## Variables d'état scalaires indépendantes : (th. des fonctions isotropes)

# Variables d'état



## Objectif :

Améliorer la représentation macroscopique des phénomènes microscopiques.

Exemples :

- solides plastifiables et endommageables ; (deux scalaires $p$ et $c$)
- représentation d'une microfissure par un vecteur mnésique.
  ($\widetilde{v}$ unitaire : orientation de la fissure et éventuellement une « intensité » de la fissure $\|v\|$)

## Variables d'état tensorielles objectives indépendantes :

- La température $T$ (thermodynamique)
- Variables d'état cinématiques : $\{\boldsymbol{X}, \{\boldsymbol{N}_t^\bullet\}\}$ (solide déformable anisotrope)
- Variables d'état mnésiques tensorielles : $\{\boldsymbol{\alpha}^\bullet\}$ (d'ordre 0 ou plus)

## Variables d'état scalaires indépendantes : (th. des fonctions isotropes)

$\{T,$

# Variables d'état



## Objectif :

Améliorer la représentation macroscopique des phénomènes microscopiques.

### Exemples :

- solides plastifiables et endommageables ; (deux scalaires $p$ et $c$)
- représentation d'une microfissure par un vecteur mnésique.
  ($\widetilde{v}$ unitaire : orientation de la fissure et éventuellement une « intensité » de la fissure $\|v\|$)

## Variables d'état tensorielles objectives indépendantes :

- La température $T$ (thermodynamique)
- Variables d'état cinématiques : $\{\boldsymbol{X}, \{\boldsymbol{N}_t^\bullet\}\}$ (solide déformable anisotrope)
- Variables d'état mnésiques tensorielles : $\{\boldsymbol{\alpha}^\bullet\}$ (d'ordre 0 ou plus)

## Variables d'état scalaires indépendantes : (th. des fonctions isotropes)

$\{T, \{\text{inv. de } \boldsymbol{X}\},$

# Variables d'état



## Objectif :

Améliorer la représentation macroscopique des phénomènes microscopiques.

### Exemples :

- solides plastifiables et endommageables ; (deux scalaires $p$ et $c$)
- représentation d'une microfissure par un vecteur mnésique.
  ($\widetilde{v}$ unitaire : orientation de la fissure et éventuellement une « intensité » de la fissure $\|v\|$)

## Variables d'état tensorielles objectives indépendantes :

- La température $T$ (thermodynamique)
- Variables d'état cinématiques : $\{\boldsymbol{X}, \{\boldsymbol{N}_t^\bullet\}\}$ (solide déformable anisotrope)
- Variables d'état mnésiques tensorielles : $\{\boldsymbol{\alpha}^\bullet\}$ (d'ordre 0 ou plus)

## Variables d'état scalaires indépendantes : (th. des fonctions isotropes)

$\{T, \{\text{inv. de } \boldsymbol{X}\}, \{\text{inv. croisés de } \boldsymbol{X} \text{ et } \boldsymbol{N}_t^\bullet\},$

# Variables d'état



## Objectif :

Améliorer la représentation macroscopique des phénomènes microscopiques.

### Exemples :

- solides plastifiables et endommageables ; (deux scalaires $p$ et $c$)
- représentation d'une microfissure par un vecteur mnésique.
  ($\widetilde{v}$ unitaire : orientation de la fissure et éventuellement une « intensité » de la fissure $\|v\|$)

## Variables d'état tensorielles objectives indépendantes :

- La température $T$ (thermodynamique)
- Variables d'état cinématiques : $\{\boldsymbol{X}, \{\boldsymbol{N}_i^\bullet\}\}$ (solide déformable anisotrope)
- Variables d'état mnésiques tensorielles : $\{\boldsymbol{\alpha}^\bullet\}$ (d'ordre 0 ou plus)

## Variables d'état scalaires indépendantes : (th. des fonctions isotropes)

$\{T, \{\text{inv. de } \boldsymbol{X}\}, \{\text{inv. croisés de } \boldsymbol{X} \text{ et } \boldsymbol{N}_i^\bullet\}, \{\text{inv. des } \boldsymbol{\alpha}^\bullet\},$

# Variables d'état



## Objectif :

Améliorer la représentation macroscopique des phénomènes microscopiques.

Exemples :

- solides plastifiables et endommageables ; (deux scalaires $p$ et $c$)
- représentation d'une microfissure par un vecteur mnésique. ($\widetilde{v}$ unitaire : orientation de la fissure et éventuellement une « intensité » de la fissure $\|v\|$)

## Variables d'état tensorielles objectives indépendantes :

- La température $T$ (thermodynamique)
- Variables d'état cinématiques : $\{\boldsymbol{X}, \{\boldsymbol{N}_i^\bullet\}\}$ (solide déformable anisotrope)
- Variables d'état mnésiques tensorielles : $\{\boldsymbol{\alpha}^\bullet\}$ (d'ordre 0 ou plus)

## Variables d'état scalaires indépendantes : (th. des fonctions isotropes)

$$\Big\{T, \big\{\text{inv. de } \boldsymbol{X}\big\}, \big\{\text{inv. croisés de } \boldsymbol{X} \text{ et } \boldsymbol{N}_i^\bullet\big\}, \big\{\text{inv. des } \boldsymbol{\alpha}^\bullet\big\}, \big\{\text{inv. croisés de } \boldsymbol{X} \text{ et } \boldsymbol{\alpha}^\bullet\big\}\Big\}$$

# Variables d'état



## Objectif :

Améliorer la représentation macroscopique des phénomènes microscopiques.

### Exemples :

- solides plastifiables et endommageables ; (deux scalaires $p$ et $c$)
- représentation d'une microfissure par un vecteur mnésique.
  ($\widetilde{v}$ unitaire : orientation de la fissure et éventuellement une « intensité » de la fissure $\|v\|$)

## Variables d'état tensorielles objectives indépendantes :

- La température $T$ (thermodynamique)
- Variables d'état cinématiques : $\{\boldsymbol{X}, \{\boldsymbol{N}_i^\bullet\}\}$ (solide déformable anisotrope)
- Variables d'état mnésiques tensorielles : $\{\boldsymbol{\alpha}^\bullet\}$ (d'ordre 0 ou plus)

## Variables d'état scalaires indépendantes : (th. des fonctions isotropes)

$$\Big\{T, \underbrace{\big\{\text{inv. de } \boldsymbol{X}\big\}, \big\{\text{inv. croisés de } \boldsymbol{X} \text{ et } \boldsymbol{N}_i^\bullet\big\}}_{\text{variables d'état cinématiques : } \{I_\bullet\}}, \big\{\text{inv. des } \boldsymbol{\alpha}^\bullet\big\}, \big\{\text{inv. croisés de } \boldsymbol{X} \text{ et } \boldsymbol{\alpha}^\bullet\big\}\Big\}$$

# Variables d'état



## Objectif :

Améliorer la représentation macroscopique des phénomènes microscopiques.

### Exemples :

- solides plastifiables et endommageables ; (deux scalaires $p$ et $c$)
- représentation d'une microfissure par un vecteur mnésique.
  ($\widetilde{v}$ unitaire : orientation de la fissure et éventuellement une « intensité » de la fissure $\|v\|$)

## Variables d'état tensorielles objectives indépendantes :

- La température $T$ (thermodynamique)
- Variables d'état cinématiques : $\{\boldsymbol{X}, \{\boldsymbol{N}_i^\bullet\}\}$ (solide déformable anisotrope)
- Variables d'état mnésiques tensorielles : $\{\boldsymbol{\alpha}^\bullet\}$ (d'ordre 0 ou plus)

## Variables d'état scalaires indépendantes : (th. des fonctions isotropes)

$$\Big\{T, \underbrace{\{\text{inv. de } \boldsymbol{X}\}, \{\text{inv. croisés de } \boldsymbol{X} \text{ et } \boldsymbol{N}_i^\bullet\}}_{\text{variables d'état cinématiques : } \{I_\bullet\}}, \underbrace{\{\text{inv. des } \boldsymbol{\alpha}^\bullet\}, \{\text{inv. croisés de } \boldsymbol{X} \text{ et } \boldsymbol{\alpha}^\bullet\}}_{\text{variables d'état mnésiques : } \{\alpha_\bullet\}}\Big\}$$

# Variables d'état



## Objectif :

Améliorer la représentation macroscopique des phénomènes microscopiques.

### Exemples :

- solides plastifiables et endommageables ; (deux scalaires $p$ et $c$)
- représentation d'une microfissure par un vecteur mnésique.
  ($\tilde{v}$ unitaire : orientation de la fissure et éventuellement une « intensité » de la fissure $\|v\|$)

## Variables d'état tensorielles objectives indépendantes :

- La température $T$ (thermodynamique)
- Variables d'état cinématiques : $\{\boldsymbol{X}, \{\boldsymbol{N}_i^\bullet\}\}$ (solide déformable anisotrope)
- Variables d'état mnésiques tensorielles : $\{\boldsymbol{\alpha}^\bullet\}$ (d'ordre 0 ou plus)

## Variables d'état scalaires indépendantes : (th. des fonctions isotropes)

$$\{T, \underbrace{\{\text{inv. de } \boldsymbol{X}\}, \{\text{inv. croisés de } \boldsymbol{X} \text{ et } \boldsymbol{N}_i^\bullet\}}_{\text{variables d'état cinématiques : } \{I_\bullet\}}, \underbrace{\{\text{inv. des } \boldsymbol{\alpha}^\bullet\}, \{\text{inv. croisés de } \boldsymbol{X} \text{ et } \boldsymbol{\alpha}^\bullet\}}_{\text{variables d'état mnésiques : } \{\alpha_\bullet\}}\}$$

- pour chaque $\boldsymbol{\alpha}^\bullet$ vectoriel :

# Variables d'état



## Objectif :

Améliorer la représentation macroscopique des phénomènes microscopiques.

Exemples :

- solides plastifiables et endommageables ; (deux scalaires $p$ et $c$)
- représentation d'une microfissure par un vecteur mnésique.
  ($\widetilde{v}$ unitaire : orientation de la fissure et éventuellement une « intensité » de la fissure $\|v\|$)

## Variables d'état tensorielles objectives indépendantes :

- La température $T$ (thermodynamique)
- Variables d'état cinématiques : $\{\boldsymbol{X}, \{\boldsymbol{N}_i^\bullet\}\}$ (solide déformable anisotrope)
- Variables d'état mnésiques tensorielles : $\{\boldsymbol{\alpha}^\bullet\}$ (d'ordre 0 ou plus)

## Variables d'état scalaires indépendantes : (th. des fonctions isotropes)

$$\Big\{T, \underbrace{\big\{\text{inv. de } \boldsymbol{X}\big\}, \big\{\text{inv. croisés de } \boldsymbol{X} \text{ et } \boldsymbol{N}_i^\bullet\big\}}_{\text{variables d'état cinématiques : } \{I_\bullet\}}, \underbrace{\big\{\text{inv. des } \boldsymbol{\alpha}^\bullet\big\}, \big\{\text{inv. croisés de } \boldsymbol{X} \text{ et } \boldsymbol{\alpha}^\bullet\big\}}_{\text{variables d'état mnésiques : } \{\alpha_\bullet\}}\Big\}$$

- pour chaque $\boldsymbol{\alpha}^\bullet$ vectoriel :
  1 invariant propre

# Variables d'état



## Objectif :

Améliorer la représentation macroscopique des phénomènes microscopiques.

Exemples :

- solides plastifiables et endommageables ; (deux scalaires $p$ et $c$)
- représentation d'une microfissure par un vecteur mnésique.
  ($\widetilde{v}$ unitaire : orientation de la fissure et éventuellement une « intensité » de la fissure $\|v\|$)

## Variables d'état tensorielles objectives indépendantes :

- La température $T$ (thermodynamique)
- Variables d'état cinématiques : $\{\boldsymbol{X}, \{\boldsymbol{N}_i^\bullet\}\}$ (solide déformable anisotrope)
- Variables d'état mnésiques tensorielles : $\{\boldsymbol{\alpha}^\bullet\}$ (d'ordre 0 ou plus)

## Variables d'état scalaires indépendantes : (th. des fonctions isotropes)

$$\Big\{T, \underbrace{\{\text{inv. de } \boldsymbol{X}\}, \{\text{inv. croisés de } \boldsymbol{X} \text{ et } \boldsymbol{N}_i^\bullet\}}_{\text{variables d'état cinématiques : } \{I_\bullet\}}, \underbrace{\{\text{inv. des } \boldsymbol{\alpha}^\bullet\}, \{\text{inv. croisés de } \boldsymbol{X} \text{ et } \boldsymbol{\alpha}^\bullet\}}_{\text{variables d'état mnésiques : } \{\alpha_\bullet\}}\Big\}$$

- pour chaque $\boldsymbol{\alpha}^\bullet$ vectoriel :
  1 invariant propre et 2 invariants croisés avec $\boldsymbol{X}$ ; (ou moins)

# Variables d'état



## Objectif :

Améliorer la représentation macroscopique des phénomènes microscopiques.

### Exemples :

- solides plastifiables et endommageables ; (deux scalaires $p$ et $c$)
- représentation d'une microfissure par un vecteur mnésique.
  ($\widetilde{v}$ unitaire : orientation de la fissure et éventuellement une « intensité » de la fissure $\|v\|$)

## Variables d'état tensorielles objectives indépendantes :

- La température $T$ (thermodynamique)
- Variables d'état cinématiques : $\{\boldsymbol{X}, \{\boldsymbol{N}_i^\bullet\}\}$ (solide déformable anisotrope)
- Variables d'état mnésiques tensorielles : $\{\boldsymbol{\alpha}^\bullet\}$ (d'ordre 0 ou plus)

## Variables d'état scalaires indépendantes : (th. des fonctions isotropes)

$$\{T, \underbrace{\{\text{inv. de } \boldsymbol{X}\}, \{\text{inv. croisés de } \boldsymbol{X} \text{ et } \boldsymbol{N}_i^\bullet\}}_{\text{variables d'état cinématiques : } \{I_\bullet\}}, \underbrace{\{\text{inv. des } \boldsymbol{\alpha}^\bullet\}, \{\text{inv. croisés de } \boldsymbol{X} \text{ et } \boldsymbol{\alpha}^\bullet\}}_{\text{variables d'état mnésiques : } \{\alpha_\bullet\}}\}$$

- pour chaque $\boldsymbol{\alpha}^\bullet$ vectoriel :
  1 invariant propre et 2 invariants croisés avec $\boldsymbol{X}$ ; (ou moins)
- pour chaque $\boldsymbol{\alpha}^\bullet$ du second ordre symétrique :

# Variables d'état



## Objectif :

Améliorer la représentation macroscopique des phénomènes microscopiques.

### Exemples :

- solides plastifiables et endommageables ; (deux scalaires $p$ et $c$)
- représentation d'une microfissure par un vecteur mnésique.
  ($\tilde{v}$ unitaire : orientation de la fissure et éventuellement une « intensité » de la fissure $\|v\|$)

## Variables d'état tensorielles objectives indépendantes :

- La température $T$ (thermodynamique)
- Variables d'état cinématiques : $\{\boldsymbol{X}, \{\boldsymbol{N}_i^\bullet\}\}$ (solide déformable anisotrope)
- Variables d'état mnésiques tensorielles : $\{\boldsymbol{\alpha}^\bullet\}$ (d'ordre 0 ou plus)

## Variables d'état scalaires indépendantes : (th. des fonctions isotropes)

$$\Big\{T, \underbrace{\{\text{inv. de } \boldsymbol{X}\}, \{\text{inv. croisés de } \boldsymbol{X} \text{ et } \boldsymbol{N}_i^\bullet\}}_{\text{variables d'état cinématiques : } \{I_\bullet\}}, \underbrace{\{\text{inv. des } \boldsymbol{\alpha}^\bullet\}, \{\text{inv. croisés de } \boldsymbol{X} \text{ et } \boldsymbol{\alpha}^\bullet\}}_{\text{variables d'état mnésiques : } \{\alpha_\bullet\}}\Big\}$$

- pour chaque $\boldsymbol{\alpha}^\bullet$ vectoriel :
  1 invariant propre et 2 invariants croisés avec $\boldsymbol{X}$ ; (ou moins)
- pour chaque $\boldsymbol{\alpha}^\bullet$ du second ordre symétrique :
  3 invariants propres

# Variables d'état



## Objectif :

Améliorer la représentation macroscopique des phénomènes microscopiques.

### Exemples :

- solides plastifiables et endommageables ; (deux scalaires $p$ et $c$)
- représentation d'une microfissure par un vecteur mnésique.
  ($\widetilde{v}$ unitaire : orientation de la fissure et éventuellement une « intensité » de la fissure $\|v\|$)

## Variables d'état tensorielles objectives indépendantes :

- La température $T$ (thermodynamique)
- Variables d'état cinématiques : $\{\boldsymbol{X}, \{\boldsymbol{N}_i^\bullet\}\}$ (solide déformable anisotrope)
- Variables d'état mnésiques tensorielles : $\{\boldsymbol{\alpha}^\bullet\}$ (d'ordre 0 ou plus)

## Variables d'état scalaires indépendantes : (th. des fonctions isotropes)

$$\{T, \underbrace{\{\text{inv. de } \boldsymbol{X}\}, \{\text{inv. croisés de } \boldsymbol{X} \text{ et } \boldsymbol{N}_i^\bullet\}}_{\text{variables d'état cinématiques : } \{I_\bullet\}}, \underbrace{\{\text{inv. des } \boldsymbol{\alpha}^\bullet\}, \{\text{inv. croisés de } \boldsymbol{X} \text{ et } \boldsymbol{\alpha}^\bullet\}}_{\text{variables d'état mnésiques : } \{\alpha_\bullet\}}\}$$

- pour chaque $\boldsymbol{\alpha}^\bullet$ vectoriel :
  1 invariant propre et 2 invariants croisés avec $\boldsymbol{X}$ ; (ou moins)
- pour chaque $\boldsymbol{\alpha}^\bullet$ du second ordre symétrique :
  3 invariants propres et 3 invariants croisés avec $\boldsymbol{X}$. (ou moins)

# Construction d'un modèle (à $k$ variables mnésiques)

# Construction d'un modèle (à $k$ variables mnésiques)

- Choix des variables d'état indépendantes :

# Construction d'un modèle (à $k$ variables mnésiques)

- Choix des variables d'état **indépendantes** : $\{T,$

# Construction d'un modèle (à $k$ variables mnésiques)

- Choix des variables d'état indépendantes : $\{T, \{I_\bullet\},$

# Construction d'un modèle (à $k$ variables mnésiques)

- Choix des variables d'état indépendantes : $\{T, \{I_\bullet\}, \alpha_1, \cdots, \alpha_k\}$

# Construction d'un modèle (à $k$ variables mnésiques)

- Choix des variables d'état indépendantes : $\{T, \{I_\bullet\}, \alpha_1, \cdots, \alpha_k\}$
  (les modes de mémorisation de chaque $\alpha_\bullet$ sont à définir)

# Construction d'un modèle (à $k$ variables mnésiques)

- Choix des variables d'état indépendantes : $\{T, \{I_\bullet\}, \alpha_1, \cdots, \alpha_k\}$
  (les modes de mémorisation de chaque $\alpha_\bullet$ sont à définir)
- $k$ frontières des états admissibles :

# Construction d'un modèle (à $k$ variables mnésiques)

- Choix des variables d'état indépendantes : $\{T, \{I_\bullet\}, \alpha_1, \cdots, \alpha_k\}$
  (les modes de mémorisation de chaque $\alpha_\bullet$ sont à définir)
- $k$ frontières des états admissibles : les états admissibles du modèle sont l'intersection des $k$ espaces des états admissibles.

# Construction d'un modèle (à $k$ variables mnésiques)

- Choix des variables d'état indépendantes : $\{T, \{I_\bullet\}, \alpha_1, \cdots, \alpha_k\}$
  (les modes de mémorisation de chaque $\alpha_\bullet$ sont à définir)
- $k$ frontières des états admissibles : les états admissibles du modèle sont l'intersection des $k$ espaces des états admissibles.
- $k$ lois d'évolution :

# Construction d'un modèle (à $k$ variables mnésiques)



- Choix des variables d'état indépendantes : $\{T, \{I_\bullet\}, \alpha_1, \cdots, \alpha_k\}$
  (les modes de mémorisation de chaque $\alpha_\bullet$ sont à définir)
- $k$ frontières des états admissibles : les états admissibles du modèle sont l'intersection des $k$ espaces des états admissibles.
- $k$ lois d'évolution : $\dot{\alpha}_j = \partial_T \alpha_j \, \dot{T} +$

# Construction d'un modèle (à $k$ variables mnésiques)



- Choix des variables d'état indépendantes : $\{T, \{I_\bullet\}, \alpha_1, \cdots, \alpha_k\}$
(les modes de mémorisation de chaque $\alpha_\bullet$ sont à définir)
- $k$ frontières des états admissibles : les états admissibles du modèle sont l'intersection des $k$ espaces des états admissibles.
- $k$ lois d'évolution : $\dot{\alpha}_j = \partial_T \alpha_j \dot{T} + \left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{S}_{\alpha_j} : \boldsymbol{D} \\ \end{array} \right.$

# Construction d'un modèle (à $k$ variables mnésiques)



- Choix des variables d'état indépendantes : $\{T, \{I_\bullet\}, \alpha_1, \cdots, \alpha_k\}$
(les modes de mémorisation de chaque $\alpha_\bullet$ sont à définir)
- $k$ frontières des états admissibles : les états admissibles du modèle sont l'intersection des $k$ espaces des états admissibles.
- $k$ lois d'évolution : $\dot{\alpha}_j = \partial_T \alpha_j \dot{T} + \left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{S}_{\alpha_j} : \boldsymbol{D} \quad \text{(quand } \alpha_j \text{ évolue)} \\ \end{array} \right.$

# Construction d'un modèle (à $k$ variables mnésiques)



- Choix des variables d'état indépendantes : $\{T, \{I_\bullet\}, \alpha_1, \cdots, \alpha_k\}$
  (les modes de mémorisation de chaque $\alpha_\bullet$ sont à définir)
- $k$ frontières des états admissibles : les états admissibles du modèle sont l'intersection des $k$ espaces des états admissibles.
- $k$ lois d'évolution : $\dot{\alpha}_j = \partial_T \alpha_j \, \dot{T} + \begin{cases} \boldsymbol{S}_{\alpha_j} : \boldsymbol{D} & \text{(quand } \alpha_j \text{ évolue)} \\ 0 & \end{cases}$

# Construction d'un modèle (à $k$ variables mnésiques)



- Choix des variables d'état indépendantes : $\{T, \{I_\bullet\}, \alpha_1, \cdots, \alpha_k\}$
  (les modes de mémorisation de chaque $\alpha_\bullet$ sont à définir)
- $k$ frontières des états admissibles : les états admissibles du modèle sont l'intersection des $k$ espaces des états admissibles.
- $k$ lois d'évolution : $\dot{\alpha}_j = \partial_T \alpha_j \dot{T} + \begin{cases} \boldsymbol{S}_{\alpha_j} : \boldsymbol{D} & \text{(quand } \alpha_j \text{ évolue)} \\ 0 \end{cases}$
- Dissipation intrinsèque non négative dans toute évolution :

# Construction d'un modèle (à $k$ variables mnésiques)



- Choix des variables d'état indépendantes : $\{T, \{I_\bullet\}, \alpha_1, \cdots, \alpha_k\}$
  (les modes de mémorisation de chaque $\alpha_\bullet$ sont à définir)
- $k$ frontières des états admissibles : les états admissibles du modèle sont l'intersection des $k$ espaces des états admissibles.
- $k$ lois d'évolution : $\dot{\alpha}_j = \partial_T \alpha_j \dot{T} + \begin{cases} \boldsymbol{S}_{\alpha_j} : \boldsymbol{D} & \text{(quand } \alpha_j \text{ évolue)} \\ 0 \end{cases}$
- Dissipation intrinsèque non négative dans toute évolution :
  $\forall \dot{T}\ \forall \boldsymbol{D}$,

# Construction d'un modèle (à $k$ variables mnésiques)

Variables d'état

Construction d'un modèle

- Choix des variables d'état indépendantes : $\{T,\{\boldsymbol{I}_\bullet\},\alpha_1,\cdots,\alpha_k\}$
  (les modes de mémorisation de chaque $\alpha_\bullet$ sont à définir)
- $k$ frontières des états admissibles : les états admissibles du modèle sont l'intersection des $k$ espaces des états admissibles.
- $k$ lois d'évolution : $\dot{\alpha}_j = \partial_T \alpha_j \, \dot{T} + \begin{cases} \boldsymbol{S}_{\alpha_j} : \boldsymbol{D} & \text{(quand } \alpha_j \text{ évolue)} \\ 0 \end{cases}$
- Dissipation intrinsèque non négative dans toute évolution :
  $\forall \dot{T}\ \forall \boldsymbol{D},\ \ -\rho\,(\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s)\,\dot{T} + \big(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_{ref}^{\{\alpha_\bullet\}}\big) : \boldsymbol{D} - \rho \sum_{j=1}^{k} \partial_{\alpha_j} \bar{f}_\psi \, \dot{\alpha}_j \geqslant 0$

# Construction d'un modèle (à $k$ variables mnésiques)



- Choix des variables d'état indépendantes : $\{T, \{I_\bullet\}, \alpha_1, \cdots, \alpha_k\}$
  (les modes de mémorisation de chaque $\alpha_\bullet$ sont à définir)
- $k$ frontières des états admissibles : les états admissibles du modèle sont l'intersection des $k$ espaces des états admissibles.
- $k$ lois d'évolution : $\dot{\alpha}_j = \partial_T \alpha_j \dot{T} + \begin{cases} \boldsymbol{S}_{\alpha_j} : \boldsymbol{D} & \text{(quand } \alpha_j \text{ évolue)} \\ 0 \end{cases}$
- Dissipation intrinsèque non négative dans toute évolution :
  $\forall \dot{T}\, \forall \boldsymbol{D}, \quad -\rho\,(\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s)\,\dot{T} + \left(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_{ref}^{\{\alpha_\bullet\}}\right) : \boldsymbol{D} - \rho \sum_{j=1}^{k} \partial_{\alpha_j} \bar{f}_\psi\, \dot{\alpha}_j \geqslant 0$

# Construction d'un modèle (à $k$ variables mnésiques)



- Choix des variables d'état indépendantes : $\{T, \{\boldsymbol{I}_\bullet\}, \alpha_1, \cdots, \alpha_k\}$
  (les modes de mémorisation de chaque $\alpha_\bullet$ sont à définir)
- $k$ frontières des états admissibles : les états admissibles du modèle sont l'intersection des $k$ espaces des états admissibles.
- $k$ lois d'évolution : $\dot{\alpha}_j = \partial_T \alpha_j \, \dot{T} + \begin{cases} \boldsymbol{S}_{\alpha_j} : \boldsymbol{D} & \text{(quand } \alpha_j \text{ évolue)} \\ 0 \end{cases}$
- Dissipation intrinsèque non négative dans toute évolution :
  $\forall \dot{T} \, \forall \boldsymbol{D}, \quad -\rho \, (\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s) \, \dot{T} + \left( \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_{ref}^{\{\alpha_\bullet\}} \right) : \boldsymbol{D} - \rho \sum_{j=1}^{k} \partial_{\alpha_j} \bar{f}_\psi \, \dot{\alpha}_j \geqslant 0$

# Construction d'un modèle (à $k$ variables mnésiques)



- Choix des variables d'état indépendantes : $\{T, \{I_\bullet\}, \alpha_1, \cdots, \alpha_k\}$
  (les modes de mémorisation de chaque $\alpha_\bullet$ sont à définir)
- $k$ frontières des états admissibles : les états admissibles du modèle sont l'intersection des $k$ espaces des états admissibles.
- $k$ lois d'évolution : $\dot{\alpha}_j = \partial_T \alpha_j \dot{T} + \begin{cases} \boldsymbol{S}_{\alpha_j} : \boldsymbol{D} & \text{(quand } \alpha_j \text{ évolue)} \\ 0 \end{cases}$
- Dissipation intrinsèque non négative dans toute évolution :
  $\forall \dot{T}\ \forall \boldsymbol{D}, \quad -\rho\,(\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s)\,\dot{T} + \left(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_{ref}^{\{\alpha_\bullet\}}\right) : \boldsymbol{D} - \rho \sum_{j=1}^{k} \partial_{\alpha_j} \bar{f}_\psi\, \dot{\alpha}_j \geqslant 0$

# Construction d'un modèle (à $k$ variables mnésiques)



- Choix des variables d'état indépendantes : $\{T, \{\boldsymbol{I}_\bullet\}, \alpha_1, \cdots, \alpha_k\}$
  (les modes de mémorisation de chaque $\alpha_\bullet$ sont à définir)
- $k$ frontières des états admissibles : les états admissibles du modèle sont l'intersection des $k$ espaces des états admissibles.
- $k$ lois d'évolution : $\dot{\alpha}_j = \partial_T \alpha_j \dot{T} + \begin{cases} \boldsymbol{S}_{\alpha_j} : \boldsymbol{D} & \text{(quand } \alpha_j \text{ évolue)} \\ 0 \end{cases}$
- Dissipation intrinsèque non négative dans toute évolution :
  $\forall \dot{T}\, \forall \boldsymbol{D},\quad -\rho\,(\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s)\,\dot{T} + \left(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_{ref}^{\{\alpha_\bullet\}}\right) : \boldsymbol{D} - \rho \sum_{j=1}^{k} \partial_{\alpha_j} \bar{f}_\psi\, \dot{\alpha}_j \geqslant 0$
  $\forall \dot{T}$

# Construction d'un modèle (à $k$ variables mnésiques)

- Choix des variables d'état indépendantes : $\{T,\{\boldsymbol{I}_\bullet\},\alpha_1,\cdots,\alpha_k\}$
  (les modes de mémorisation de chaque $\alpha_\bullet$ sont à définir)
- $k$ frontières des états admissibles : les états admissibles du modèle sont l'intersection des $k$ espaces des états admissibles.
- $k$ lois d'évolution : $\dot{\alpha}_j = \partial_T\alpha_j\,\dot{T} + \begin{cases} \boldsymbol{S}_{\alpha_j} : \boldsymbol{D} & \text{(quand } \alpha_j \text{ évolue)} \\ 0 & \end{cases}$
- Dissipation intrinsèque non négative dans toute évolution :
  $\forall\dot{T}\,\forall\boldsymbol{D},\quad -\rho\,(\partial_T\bar{f}_\psi+\bar{f}_s)\,\dot{T}+\left(\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{\sigma}_{ref}^{\{\alpha_\bullet\}}\right):\boldsymbol{D}-\rho\sum_{j=1}^{k}\partial_{\alpha_j}\bar{f}_\psi\,\dot{\alpha}_j\geqslant 0$
  $\forall\dot{T}\quad\Rightarrow\quad$ une relation de Helmholtz.

# Construction d'un modèle (à $k$ variables mnésiques)



- Choix des variables d'état indépendantes : $\{T, \{I_\bullet\}, \alpha_1, \cdots, \alpha_k\}$
  (les modes de mémorisation de chaque $\alpha_\bullet$ sont à définir)
- $k$ frontières des états admissibles : les états admissibles du modèle sont l'intersection des $k$ espaces des états admissibles.
- $k$ lois d'évolution : $\dot{\alpha}_j = \partial_T \alpha_j \, \dot{T} + \begin{cases} \boldsymbol{S}_{\alpha_j} : \boldsymbol{D} & \text{(quand } \alpha_j \text{ évolue)} \\ 0 \end{cases}$
- Dissipation intrinsèque non négative dans toute évolution :
  $\forall \dot{T} \, \forall \boldsymbol{D}, \quad -\rho \, (\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s) \, \dot{T} + \left(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_{ref}^{\{\alpha_\bullet\}}\right) : \boldsymbol{D} - \rho \sum_{j=1}^{k} \partial_{\alpha_j} \bar{f}_\psi \, \dot{\alpha}_j \geqslant 0$
  $\forall \dot{T} \quad \Rightarrow \quad$ une relation de Helmholtz. (inhabituelle si $\partial_T \alpha_j \neq 0$)

# Construction d'un modèle (à $k$ variables mnésiques)



- Choix des variables d'état indépendantes : $\{T, \{I_\bullet\}, \alpha_1, \cdots, \alpha_k\}$
  (les modes de mémorisation de chaque $\alpha_\bullet$ sont à définir)
- $k$ frontières des états admissibles : les états admissibles du modèle sont l'intersection des $k$ espaces des états admissibles.
- $k$ lois d'évolution : $\dot{\alpha}_j = \partial_T \alpha_j \dot{T} + \begin{cases} \boldsymbol{S}_{\alpha_j} : \boldsymbol{D} & \text{(quand } \alpha_j \text{ évolue)} \\ 0 \end{cases}$
- Dissipation intrinsèque non négative dans toute évolution :
  $\forall \dot{T}\ \forall \boldsymbol{D},\quad -\rho\,(\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s)\,\dot{T} + \left(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_{ref}^{\{\alpha_\bullet\}}\right) : \boldsymbol{D} - \rho \sum_{j=1}^{k} \partial_{\alpha_j} \bar{f}_\psi\, \dot{\alpha}_j \geqslant 0$
  $\forall \dot{T}$ $\Rightarrow$ une relation de Helmholtz. (inhabituelle si $\partial_T \alpha_j \neq 0$)
  $\forall \boldsymbol{D}$

# Construction d'un modèle (à $k$ variables mnésiques)



- Choix des variables d'état indépendantes : $\{T, \{\boldsymbol{I}_\bullet\}, \alpha_1, \cdots, \alpha_k\}$
  (les modes de mémorisation de chaque $\alpha_\bullet$ sont à définir)
- $k$ frontières des états admissibles : les états admissibles du modèle sont l'intersection des $k$ espaces des états admissibles.
- $k$ lois d'évolution : $\dot{\alpha}_j = \partial_T \alpha_j \, \dot{T} + \begin{cases} \boldsymbol{S}_{\alpha_j} : \boldsymbol{D} & \text{(quand } \alpha_j \text{ évolue)} \\ 0 & \end{cases}$
- Dissipation intrinsèque non négative dans toute évolution :

  $\forall \dot{T} \, \forall \boldsymbol{D}, \quad -\rho \, (\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s) \, \dot{T} + \big(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_{ref}^{\{\alpha_\bullet\}}\big) : \boldsymbol{D} - \rho \sum_{j=1}^{k} \partial_{\alpha_j} \bar{f}_\psi \, \dot{\alpha}_j \geqslant 0$

  $\forall \dot{T} \quad \Rightarrow \quad$ une relation de Helmholtz. (inhabituelle si $\partial_T \alpha_j \neq 0$)

  $\forall \boldsymbol{D} \quad \Rightarrow \quad$ une loi de comportement mécanique :

# Construction d'un modèle (à $k$ variables mnésiques)



- Choix des variables d'état indépendantes : $\{T, \{\boldsymbol{I}_\bullet\}, \alpha_1, \cdots, \alpha_k\}$
  (les modes de mémorisation de chaque $\alpha_\bullet$ sont à définir)
- $k$ frontières des états admissibles : les états admissibles du modèle sont l'intersection des $k$ espaces des états admissibles.
- $k$ lois d'évolution : $\dot{\alpha}_j = \partial_T \alpha_j \dot{T} + \begin{cases} \boldsymbol{S}_{\alpha_j} : \boldsymbol{D} & \text{(quand } \alpha_j \text{ évolue)} \\ 0 \end{cases}$
- Dissipation intrinsèque non négative dans toute évolution :
  $\forall \dot{T}\, \forall \boldsymbol{D}, \quad -\rho\,(\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s)\,\dot{T} + \left(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_{ref}^{\{\alpha_\bullet\}}\right) : \boldsymbol{D} - \rho \sum_{j=1}^{k} \partial_{\alpha_j} \bar{f}_\psi\, \dot{\alpha}_j \geqslant 0$
  $\forall \dot{T} \quad \Rightarrow$ une relation de Helmholtz. (inhabituelle si $\partial_T \alpha_j \neq 0$)
  $\forall \boldsymbol{D} \quad \Rightarrow$ une loi de comportement mécanique :
  $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_{ref}^{\{\alpha_\bullet\}} +$

# Construction d'un modèle (à $k$ variables mnésiques)



- Choix des variables d'état indépendantes : $\{T, \{\boldsymbol{I}_\bullet\}, \alpha_1, \cdots, \alpha_k\}$
  (les modes de mémorisation de chaque $\alpha_\bullet$ sont à définir)
- $k$ frontières des états admissibles : les états admissibles du modèle sont l'intersection des $k$ espaces des états admissibles.
- $k$ lois d'évolution : $\dot{\alpha}_j = \partial_T \alpha_j \dot{T} + \begin{cases} \boldsymbol{S}_{\alpha_j} : \boldsymbol{D} & \text{(quand } \alpha_j \text{ évolue)} \\ 0 \end{cases}$
- Dissipation intrinsèque non négative dans toute évolution :

$$\forall \dot{T}\, \forall \boldsymbol{D}, \quad -\rho\,(\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s)\,\dot{T} + \big(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_{ref}^{\{\alpha_\bullet\}}\big) : \boldsymbol{D} - \rho \textstyle\sum_{j=1}^k \partial_{\alpha_j} \bar{f}_\psi\, \dot{\alpha}_j \geqslant 0$$

$\forall \dot{T} \quad \Rightarrow \quad$ une relation de Helmholtz. (inhabituelle si $\partial_T \alpha_j \neq 0$)

$\forall \boldsymbol{D} \quad \Rightarrow \quad$ une loi de comportement mécanique :

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_{ref}^{\{\alpha_\bullet\}} + \rho \textstyle\sum_{j=1}^k \begin{cases} \boldsymbol{S}_{\alpha_j} & \text{(quand } \alpha_j \text{ évolue)} \\ 0 \end{cases} \quad +$$

# Construction d'un modèle (à $k$ variables mnésiques)



- Choix des variables d'état indépendantes : $\{T, \{I_\bullet\}, \alpha_1, \cdots, \alpha_k\}$
  (les modes de mémorisation de chaque $\alpha_\bullet$ sont à définir)
- $k$ frontières des états admissibles : les états admissibles du modèle sont l'intersection des $k$ espaces des états admissibles.
- $k$ lois d'évolution : $\dot{\alpha}_j = \partial_T \alpha_j \, \dot{T} + \begin{cases} \boldsymbol{S}_{\alpha_j} : \boldsymbol{D} & \text{(quand } \alpha_j \text{ évolue)} \\ 0 \end{cases}$
- Dissipation intrinsèque non négative dans toute évolution :
  $\forall \dot{T} \, \forall \boldsymbol{D}, \quad -\rho \, (\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s) \, \dot{T} + \big(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_{ref}^{\{\alpha_\bullet\}}\big) : \boldsymbol{D} - \rho \sum_{j=1}^{k} \partial_{\alpha_j} \bar{f}_\psi \, \dot{\alpha}_j \geqslant 0$
  $\forall \dot{T} \quad \Rightarrow$ une relation de Helmholtz. (inhabituelle si $\partial_T \alpha_j \neq 0$)
  $\forall \boldsymbol{D} \quad \Rightarrow$ une loi de comportement mécanique :
  $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_{ref}^{\{\alpha_\bullet\}} + \rho \sum_{j=1}^{k} \begin{cases} \boldsymbol{S}_{\alpha_j} & \text{(quand } \alpha_j \text{ évolue)} \\ 0 \end{cases} + \boldsymbol{\sigma}_d(\boldsymbol{D}, \dot{T}, \cdots)$

# Construction d'un modèle (à $k$ variables mnésiques)



- Choix des variables d'état indépendantes : $\{T, \{\boldsymbol{I}_\bullet\}, \alpha_1, \cdots, \alpha_k\}$
  (les modes de mémorisation de chaque $\alpha_\bullet$ sont à définir)
- $k$ frontières des états admissibles : les états admissibles du modèle sont l'intersection des $k$ espaces des états admissibles.
- $k$ lois d'évolution : $\dot{\alpha}_j = \partial_T \alpha_j \dot{T} + \begin{cases} \boldsymbol{S}_{\alpha_j} : \boldsymbol{D} & \text{(quand } \alpha_j \text{ évolue)} \\ 0 \end{cases}$
- Dissipation intrinsèque non négative dans toute évolution :
  $$\forall \dot{T}\, \forall \boldsymbol{D}, \quad -\rho\,(\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s)\,\dot{T} + \big(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_{ref}^{\{\alpha_\bullet\}}\big) : \boldsymbol{D} - \rho \textstyle\sum_{j=1}^{k} \partial_{\alpha_j} \bar{f}_\psi\, \dot{\alpha}_j \geqslant 0$$
  $\forall \dot{T} \quad \Rightarrow \quad$ une relation de Helmholtz. (inhabituelle si $\partial_T \alpha_j \neq 0$)
  $\forall \boldsymbol{D} \quad \Rightarrow \quad$ une loi de comportement mécanique :
  $$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_{ref}^{\{\alpha_\bullet\}} + \rho \textstyle\sum_{j=1}^{k} \begin{cases} \boldsymbol{S}_{\alpha_j} & \text{(quand } \alpha_j \text{ évolue)} \\ 0 \end{cases} + \boldsymbol{\sigma}_d(\boldsymbol{D}, \dot{T}, \cdots)$$
- Continuité des contraintes

# Construction d'un modèle (à $k$ variables mnésiques)

- Choix des variables d'état indépendantes : $\{T, \{\boldsymbol{I}_\bullet\}, \alpha_1, \cdots, \alpha_k\}$
(les modes de mémorisation de chaque $\alpha_\bullet$ sont à définir)
- $k$ frontières des états admissibles : les états admissibles du modèle sont l'intersection des $k$ espaces des états admissibles.
- $k$ lois d'évolution : $\dot{\alpha}_j = \partial_T \alpha_j \, \dot{T} + \begin{cases} \boldsymbol{S}_{\alpha_j} : \boldsymbol{D} & \text{(quand } \alpha_j \text{ évolue)} \\ 0 \end{cases}$
- Dissipation intrinsèque non négative dans toute évolution :
$\forall \dot{T}\, \forall \boldsymbol{D}, \quad -\rho\,(\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s)\,\dot{T} + \big(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_{ref}^{\{\alpha_\bullet\}}\big) : \boldsymbol{D} - \rho \sum_{j=1}^{k} \partial_{\alpha_j} \bar{f}_\psi \, \dot{\alpha}_j \geqslant 0$
$\forall \dot{T} \quad \Rightarrow$ une relation de Helmholtz. (inhabituelle si $\partial_T \alpha_j \neq 0$)
$\forall \boldsymbol{D} \quad \Rightarrow$ une loi de comportement mécanique :
$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_{ref}^{\{\alpha_\bullet\}} + \rho \sum_{j=1}^{k} \begin{cases} \boldsymbol{S}_{\alpha_j} & \text{(quand } \alpha_j \text{ évolue)} \\ 0 \end{cases} + \boldsymbol{\sigma}_d(\boldsymbol{D}, \dot{T}, \cdots)$
- Continuité des contraintes $\Rightarrow$ $k$ conditions sur $\bar{f}_\psi$ :

Variables d'état
Construction d'un modèle

# Construction d'un modèle (à $k$ variables mnésiques)



- Choix des variables d'état indépendantes : $\{T, \{\boldsymbol{I}_\bullet\}, \alpha_1, \cdots, \alpha_k\}$
  (les modes de mémorisation de chaque $\alpha_\bullet$ sont à définir)
- $k$ frontières des états admissibles : les états admissibles du modèle sont l'intersection des $k$ espaces des états admissibles.
- $k$ lois d'évolution : $\dot{\alpha}_j = \partial_T \alpha_j \dot{T} + \begin{cases} \boldsymbol{S}_{\alpha_j} : \boldsymbol{D} & \text{(quand } \alpha_j \text{ évolue)} \\ 0 \end{cases}$
- Dissipation intrinsèque non négative dans toute évolution :
  $\forall \dot{T}\, \forall \boldsymbol{D},\quad -\rho\,(\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s)\,\dot{T} + \left(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_{ref}^{\{\alpha_\bullet\}}\right) : \boldsymbol{D} - \rho \sum_{j=1}^{k} \partial_{\alpha_j} \bar{f}_\psi\, \dot{\alpha}_j \geqslant 0$
  $\forall \dot{T} \quad \Rightarrow$ une relation de Helmholtz. (inhabituelle si $\partial_T \alpha_j \neq 0$)
  $\forall \boldsymbol{D} \quad \Rightarrow$ une loi de comportement mécanique :
  $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_{ref}^{\{\alpha_\bullet\}} + \rho \sum_{j=1}^{k} \begin{cases} \boldsymbol{S}_{\alpha_j} & \text{(quand } \alpha_j \text{ évolue)} \\ 0 \end{cases} + \boldsymbol{\sigma}_d(\boldsymbol{D}, \dot{T}, \cdots)$
- Continuité des contraintes $\Rightarrow$ $k$ conditions sur $\bar{f}_\psi$ :
  $\left[\partial_{\alpha_j} \bar{f}_\psi\right]_{(\text{quand } \alpha_j \text{ évolue})} = 0 \quad$ pour $j \in [1\,; k]$

# Construction d'un modèle (à $k$ variables mnésiques)



- Choix des variables d'état indépendantes : $\{T, \{\boldsymbol{I}_\bullet\}, \alpha_1, \cdots, \alpha_k\}$
  (les modes de mémorisation de chaque $\alpha_\bullet$ sont à définir)
- $k$ frontières des états admissibles : les états admissibles du modèle sont l'intersection des $k$ espaces des états admissibles.
- $k$ lois d'évolution : $\dot{\alpha}_j = \partial_T \alpha_j \, \dot{T} + \begin{cases} \boldsymbol{S}_{\alpha_j} : \boldsymbol{D} & \text{(quand } \alpha_j \text{ évolue)} \\ 0 \end{cases}$
- Dissipation intrinsèque non négative dans toute évolution :
  $\forall \dot{T} \, \forall \boldsymbol{D}, \quad -\rho \, (\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s) \, \dot{T} + \big(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_{ref}^{\{\alpha_\bullet\}}\big) : \boldsymbol{D} - \rho \sum_{j=1}^{k} \partial_{\alpha_j} \bar{f}_\psi \, \dot{\alpha}_j \geqslant 0$
  $\forall \dot{T} \quad \Rightarrow$ une relation de Helmholtz. (inhabituelle si $\partial_T \alpha_j \neq 0$)
  $\forall \boldsymbol{D} \quad \Rightarrow$ une loi de comportement mécanique :
  $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_{ref}^{\{\alpha_\bullet\}} + \rho \sum_{j=1}^{k} \begin{cases} \boldsymbol{S}_{\alpha_j} & \text{(quand } \alpha_j \text{ évolue)} \\ 0 \end{cases} + \boldsymbol{\sigma}_d(\boldsymbol{D}, \dot{T}, \cdots)$
- Continuité des contraintes $\Rightarrow$ $k$ conditions sur $\bar{f}_\psi$ :
  $\big[\partial_{\alpha_j} \bar{f}_\psi\big]_{\text{(quand } \alpha_j \text{ évolue)}} = 0 \quad$ pour $j \in [1\,; k]$
- Construction de $\bar{f}_\psi$

# Construction d'un modèle (à $k$ variables mnésiques)



- Choix des variables d'état indépendantes : $\{T, \{\boldsymbol{I}_\bullet\}, \alpha_1, \cdots, \alpha_k\}$
  (les modes de mémorisation de chaque $\alpha_\bullet$ sont à définir)
- $k$ frontières des états admissibles : les états admissibles du modèle sont l'intersection des $k$ espaces des états admissibles.
- $k$ lois d'évolution : $\dot{\alpha}_j = \partial_T \alpha_j \, \dot{T} + \begin{cases} \boldsymbol{S}_{\alpha_j} : \boldsymbol{D} & \text{(quand } \alpha_j \text{ évolue)} \\ 0 \end{cases}$
- Dissipation intrinsèque non négative dans toute évolution :
  $$\forall \dot{T}\; \forall \boldsymbol{D}, \quad -\rho\,(\partial_T \overline{f}_\psi + \overline{f}_s)\,\dot{T} + \big(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_{ref}^{\{\alpha_\bullet\}}\big) : \boldsymbol{D} - \rho \textstyle\sum_{j=1}^{k} \partial_{\alpha_j} \overline{f}_\psi \, \dot{\alpha}_j \geqslant 0$$
  $\forall \dot{T} \quad \Rightarrow \quad$ une relation de Helmholtz. (inhabituelle si $\partial_T \alpha_j \neq 0$)
  $\forall \boldsymbol{D} \quad \Rightarrow \quad$ une loi de comportement mécanique :
  $$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_{ref}^{\{\alpha_\bullet\}} + \rho \textstyle\sum_{j=1}^{k} \begin{cases} \boldsymbol{S}_{\alpha_j} & \text{(quand } \alpha_j \text{ évolue)} \\ 0 \end{cases} + \boldsymbol{\sigma}_d(\boldsymbol{D}, \dot{T}, \cdots)$$
- Continuité des contraintes $\Rightarrow$ $k$ conditions sur $\overline{f}_\psi$ :
  $\big[\partial_{\alpha_j} \overline{f}_\psi\big]_{(\text{quand } \alpha_j \text{ évolue})} = 0 \quad$ pour $j \in [1\,;k]$
- Construction de $\overline{f}_\psi$ (chemin conduisant à un état admissible quelconque)

# Construction d'un modèle (à $k$ variables mnésiques)



- Choix des variables d'état indépendantes : $\{T,\{\boldsymbol{I}_\bullet\},\alpha_1,\cdots,\alpha_k\}$
  (les modes de mémorisation de chaque $\alpha_\bullet$ sont à définir)
- $k$ frontières des états admissibles : les états admissibles du modèle sont l'intersection des $k$ espaces des états admissibles.
- $k$ lois d'évolution : $\dot{\alpha}_j = \partial_T \alpha_j \, \dot{T} + \begin{cases} \boldsymbol{S}_{\alpha_j} : \boldsymbol{D} & \text{(quand } \alpha_j \text{ évolue)} \\ 0 \end{cases}$
- Dissipation intrinsèque non négative dans toute évolution :
  $\forall \dot{T}\, \forall \boldsymbol{D},\quad -\rho\,(\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s)\,\dot{T} + \big(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_{ref}^{\{\alpha_\bullet\}}\big) : \boldsymbol{D} - \rho \sum_{j=1}^{k} \partial_{\alpha_j} \bar{f}_\psi \, \dot{\alpha}_j \geqslant 0$
  $\forall \dot{T} \quad \Rightarrow$ une relation de Helmholtz. (inhabituelle si $\partial_T \alpha_j \neq 0$)
  $\forall \boldsymbol{D} \quad \Rightarrow$ une loi de comportement mécanique :
  $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_{ref}^{\{\alpha_\bullet\}} + \rho \sum_{j=1}^{k} \begin{cases} \boldsymbol{S}_{\alpha_j} & \text{(quand } \alpha_j \text{ évolue)} \\ 0 \end{cases} + \boldsymbol{\sigma}_d(\boldsymbol{D}, \dot{T}, \cdots)$
- Continuité des contraintes $\Rightarrow$ $k$ conditions sur $\bar{f}_\psi$ :
  $[\partial_{\alpha_j} \bar{f}_\psi]_{\text{(quand } \alpha_j \text{ évolue)}} = 0$ pour $j \in [1\,;k]$
- Construction de $\bar{f}_\psi$ (chemin conduisant à un état admissible quelconque)
- Choix des contraintes dissipatives :

# Construction d'un modèle (à $k$ variables mnésiques)



- Choix des variables d'état indépendantes : $\{T, \{\boldsymbol{I}_\bullet\}, \alpha_1, \cdots, \alpha_k\}$
  (les modes de mémorisation de chaque $\alpha_\bullet$ sont à définir)
- $k$ frontières des états admissibles : les états admissibles du modèle sont l'intersection des $k$ espaces des états admissibles.
- $k$ lois d'évolution : $\dot{\alpha}_j = \partial_T \alpha_j \dot{T} + \begin{cases} \boldsymbol{S}_{\alpha_j} : \boldsymbol{D} & \text{(quand } \alpha_j \text{ évolue)} \\ 0 \end{cases}$
- Dissipation intrinsèque non négative dans toute évolution :
  $\forall \dot{T}\, \forall \boldsymbol{D},\quad -\rho\,(\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s)\,\dot{T} + \left(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_{ref}^{\{\alpha_\bullet\}}\right) : \boldsymbol{D} - \rho \sum_{j=1}^{k} \partial_{\alpha_j} \bar{f}_\psi\, \dot{\alpha}_j \geqslant 0$
  $\forall \dot{T} \quad \Rightarrow \quad$ une relation de Helmholtz. (inhabituelle si $\partial_T \alpha_j \neq 0$)
  $\forall \boldsymbol{D} \quad \Rightarrow \quad$ une loi de comportement mécanique :
  $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_{ref}^{\{\alpha_\bullet\}} + \rho \sum_{j=1}^{k} \begin{cases} \boldsymbol{S}_{\alpha_j} & \text{(quand } \alpha_j \text{ évolue)} \\ 0 \end{cases} + \boldsymbol{\sigma}_d(\boldsymbol{D}, \dot{T}, \cdots)$
- Continuité des contraintes $\Rightarrow$ $k$ conditions sur $\bar{f}_\psi$ :
  $\left[\partial_{\alpha_j} \bar{f}_\psi\right]_{\text{(quand } \alpha_j \text{ évolue)}} = 0 \qquad$ pour $j \in [1\,;k]$
- Construction de $\bar{f}_\psi$ (chemin conduisant à un état admissible quelconque)
- Choix des contraintes dissipatives : $\forall \boldsymbol{D},\ \boldsymbol{\sigma}_d(\boldsymbol{D}, \dot{T}, \cdots) : \boldsymbol{D} \geqslant 0$

Huitième partie

# Épilogue

# Pour tous les milieux continus (fluides et solides)

# Pour tous les milieux continus (fluides et solides)

1. Algèbre et analyse tensorielles :

# Pour tous les milieux continus (fluides et solides)

1. Algèbre et analyse tensorielles : (en dimension 3)

# Pour tous les milieux continus (fluides et solides)

1. Algèbre et analyse tensorielles : (en dimension 3)
   - opérations tensorielles :

# Pour tous les milieux continus (fluides et solides)

1. Algèbre et analyse tensorielles : (en dimension 3)
   - opérations tensorielles : $+$

# Pour tous les milieux continus (fluides et solides)

1. Algèbre et analyse tensorielles : (en dimension 3)
   - opérations tensorielles : $+, -$

# Pour tous les milieux continus (fluides et solides)

1. Algèbre et analyse tensorielles : (en dimension 3)
   - opérations tensorielles : $+, -, \otimes$

# Pour tous les milieux continus (fluides et solides)

1. Algèbre et analyse tensorielles : (en dimension 3)
   - opérations tensorielles : $+\,,-\,,\otimes\,,\mathrm{tr}$

# Pour tous les milieux continus (fluides et solides)

1. Algèbre et analyse tensorielles : (en dimension 3)
   - opérations tensorielles : $+\,,-\,,\otimes\,,\mathrm{tr}\,,\cdot$

# Pour tous les milieux continus (fluides et solides)

1. Algèbre et analyse tensorielles : (en dimension 3)
   - opérations tensorielles : $+ \,, - \,, \otimes \,, \mathrm{tr} \,, \cdot \,, :$

# Pour tous les milieux continus (fluides et solides)

1. Algèbre et analyse tensorielles : (en dimension 3)
   - opérations tensorielles : $+\,,-\,,\otimes\,,\mathrm{tr}\,,\cdot\,,:\,,\cdots$

# Pour tous les milieux continus (fluides et solides)

1. Algèbre et analyse tensorielles : (en dimension 3)
   - opérations tensorielles : $+\,,-\,,\otimes\,,\mathrm{tr}\,,\cdot\,,:\,,\cdots$
   - ordre 2 :

# Pour tous les milieux continus (fluides et solides)

1. Algèbre et analyse tensorielles : (en dimension 3)
   - opérations tensorielles : $+, -, \otimes, \mathrm{tr}, \cdot, :, \cdots$
   - ordre 2 : $\mathbf{sym}$ / $\mathbf{asym}$

# Pour tous les milieux continus (fluides et solides)



1. Algèbre et analyse tensorielles : (en dimension 3)
   - opérations tensorielles : $+ \,, - \,, \otimes \,, \mathrm{tr} \,, \cdot \,, : \,, \cdots$
   - ordre 2 : $\mathbf{sym} \,/\, \mathbf{asym} \,, \mathbf{sph} \,/\, \mathbf{dev}$

# Pour tous les milieux continus (fluides et solides)

1. Algèbre et analyse tensorielles : (en dimension 3)
   - opérations tensorielles : $+\,,-\,,\otimes\,,\mathrm{tr}\,,\cdot\,,:\,,\cdots$
   - ordre 2 : **sym** / **asym** , **sph** / **dev** , spectre

# Pour tous les milieux continus (fluides et solides)



1. Algèbre et analyse tensorielles : (en dimension 3)
   - opérations tensorielles : $+, -, \otimes, \mathrm{tr}, \cdot, :, \cdots$
   - ordre 2 : $\mathbf{sym}$ / $\mathbf{asym}$ , $\mathbf{sph}$ / $\mathbf{dev}$ , spectre, invariants

# Pour tous les milieux continus (fluides et solides)

1. Algèbre et analyse tensorielles : (en dimension 3)
   - opérations tensorielles : $+\,,-\,,\otimes\,,\mathrm{tr}\,,\cdot\,,:\,,\cdots$
   - ordre 2 : **sym** / **asym** , **sph** / **dev** , spectre, invariants, positivité

# Pour tous les milieux continus (fluides et solides)



1. Algèbre et analyse tensorielles : (en dimension 3)
   - opérations tensorielles : $+\,,-\,,\otimes\,,\mathrm{tr}\,,\cdot\,,:\,,\cdots$
   - ordre 2 : $\mathbf{sym}$ / $\mathbf{asym}$ , $\mathbf{sph}$ / $\mathbf{dev}$ , spectre, invariants, positivité, orthogonalité

# Pour tous les milieux continus (fluides et solides)

1. Algèbre et analyse tensorielles : (en dimension 3)
   - opérations tensorielles : $+\,,-\,,\otimes\,,\mathrm{tr}\,,\cdot\,,:\,,\cdots$
   - ordre 2 : $\mathbf{sym}$ / $\mathbf{asym}$ , $\mathbf{sph}$ / $\mathbf{dev}$ , spectre, invariants, positivité, orthogonalité, décomposition polaire ;

# Pour tous les milieux continus (fluides et solides)



1. Algèbre et analyse tensorielles : (en dimension 3)
   - opérations tensorielles : $+, -, \otimes, \mathrm{tr}, \cdot, :, \cdots$
   - ordre 2 : $\mathbf{sym}$ / $\mathbf{asym}$, $\mathbf{sph}$ / $\mathbf{dev}$, spectre, invariants, positivité, orthogonalité, décomposition polaire ;
   - fonctions tensorielles

# Pour tous les milieux continus (fluides et solides)

1. Algèbre et analyse tensorielles : (en dimension 3)
   - opérations tensorielles : $+\,,-\,,\otimes\,,\mathrm{tr}\,,\cdot\,,:\,,\cdots$
   - ordre 2 : $\mathbf{sym}$ / $\mathbf{asym}$ , $\mathbf{sph}$ / $\mathbf{dev}$ , spectre, invariants, positivité, orthogonalité, décomposition polaire ;
   - fonctions tensorielles, théorème des fonctions isotropes ;

# Pour tous les milieux continus (fluides et solides)

1. Algèbre et analyse tensorielles : (en dimension 3)
   - opérations tensorielles : $+\,,-\,,\otimes\,,\mathrm{tr}\,,\cdot\,,:\,,\cdots$
   - ordre 2 : $\mathbf{sym}$ / $\mathbf{asym}$ , $\mathbf{sph}$ / $\mathbf{dev}$ , spectre, invariants, positivité, orthogonalité, décomposition polaire ;
   - fonctions tensorielles, théorème des fonctions isotropes ;
   - champs tensoriels :

# Pour tous les milieux continus (fluides et solides)



1. Algèbre et analyse tensorielles : (en dimension 3)
   - opérations tensorielles : $+\,,-\,,\otimes\,,\mathrm{tr}\,,\cdot\,,:\,,\cdots$
   - ordre 2 : $\mathbf{sym}$ / $\mathbf{asym}$ , $\mathbf{sph}$ / $\mathbf{dev}$ , spectre, invariants, positivité, orthogonalité, décomposition polaire ;
   - fonctions tensorielles, théorème des fonctions isotropes ;
   - champs tensoriels : $\mathbf{grad}$

# Pour tous les milieux continus (fluides et solides)

1. Algèbre et analyse tensorielles : (en dimension 3)
   - opérations tensorielles : $+\,,-\,,\otimes\,,\mathrm{tr}\,,\cdot\,,:\,,\cdots$
   - ordre 2 : $\mathbf{sym}$ / $\mathbf{asym}$ , $\mathbf{sph}$ / $\mathbf{dev}$ , spectre, invariants, positivité, orthogonalité, décomposition polaire ;
   - fonctions tensorielles, théorème des fonctions isotropes ;
   - champs tensoriels : $\mathbf{grad}$ , $\mathbf{div}$

# Pour tous les milieux continus (fluides et solides)



1. Algèbre et analyse tensorielles : (en dimension 3)
   - opérations tensorielles : $+\,,-\,,\otimes\,,\mathrm{tr}\,,\cdot\,,:\,,\cdots$
   - ordre 2 : $\mathbf{sym}$ / $\mathbf{asym}$ , $\mathbf{sph}$ / $\mathbf{dev}$ , spectre, invariants, positivité, orthogonalité, décomposition polaire ;
   - fonctions tensorielles, théorème des fonctions isotropes ;
   - champs tensoriels : $\mathbf{grad}$ , $\mathbf{div}$ , $\mathbf{rot}$

# Pour tous les milieux continus (fluides et solides)

1. Algèbre et analyse tensorielles : (en dimension 3)
   - opérations tensorielles : $+\,,-\,,\otimes\,,\mathrm{tr}\,,\cdot\,,:\,,\cdots$
   - ordre 2 : $\mathbf{sym}\,/\,\mathbf{asym}\,,\mathbf{sph}\,/\,\mathbf{dev}$ , spectre, invariants, positivité, orthogonalité, décomposition polaire ;
   - fonctions tensorielles, théorème des fonctions isotropes ;
   - champs tensoriels : $\mathbf{grad}\,,\mathbf{div}\,,\mathbf{rot}\,,\boldsymbol{\Delta}$.

# Pour tous les milieux continus (fluides et solides)



1. Algèbre et analyse tensorielles : (en dimension 3)
   - opérations tensorielles : $+ , - , \otimes , \mathrm{tr} , \cdot , : , \cdots$
   - ordre 2 : $\mathbf{sym}$ / $\mathbf{asym}$ , $\mathbf{sph}$ / $\mathbf{dev}$ , spectre, invariants, positivité, orthogonalité, décomposition polaire ;
   - fonctions tensorielles, théorème des fonctions isotropes ;
   - champs tensoriels : $\mathbf{grad}$ , $\mathbf{div}$ , $\mathbf{rot}$ , $\boldsymbol{\Delta}$ .
2. Cinématique :

# Pour tous les milieux continus (fluides et solides)

1. Algèbre et analyse tensorielles : (en dimension 3)
   - opérations tensorielles : $+, -, \otimes, \mathrm{tr}, \cdot, :, \cdots$
   - ordre 2 : $\mathbf{sym}$ / $\mathbf{asym}$ , $\mathbf{sph}$ / $\mathbf{dev}$ , spectre, invariants, positivité, orthogonalité, décomposition polaire ;
   - fonctions tensorielles, théorème des fonctions isotropes ;
   - champs tensoriels : $\mathbf{grad}$ , $\mathbf{div}$ , $\mathbf{rot}$ , $\boldsymbol{\Delta}$.
2. Cinématique : (milieu continu, physique classique)

# Pour tous les milieux continus (fluides et solides)

1. Algèbre et analyse tensorielles : (en dimension 3)
   - opérations tensorielles : $+\,,\,-\,,\,\otimes\,,\,\mathrm{tr}\,,\,\cdot\,,\,:\,,\,\cdots$
   - ordre 2 : $\mathbf{sym}$ / $\mathbf{asym}$ , $\mathbf{sph}$ / $\mathbf{dev}$ , spectre, invariants, positivité, orthogonalité, décomposition polaire ;
   - fonctions tensorielles, théorème des fonctions isotropes ;
   - champs tensoriels : $\mathbf{grad}\,,\,\mathbf{div}\,,\,\mathbf{rot}\,,\,\boldsymbol{\Delta}$ .
2. Cinématique : (milieu continu, physique classique)
   - changement d'observateur

# Pour tous les milieux continus (fluides et solides)

1. Algèbre et analyse tensorielles : (en dimension 3)
    - opérations tensorielles : $+\,,-\,,\otimes\,,\mathrm{tr}\,,\cdot\,,:\,,\cdots$
    - ordre 2 : $\mathbf{sym}$ / $\mathbf{asym}$ , $\mathbf{sph}$ / $\mathbf{dev}$ , spectre, invariants, positivité, orthogonalité, décomposition polaire ;
    - fonctions tensorielles, théorème des fonctions isotropes ;
    - champs tensoriels : $\mathbf{grad}\,,\mathbf{div}\,,\mathbf{rot}\,,\boldsymbol{\Delta}$.
2. Cinématique : (milieu continu, physique classique)
    - changement d'observateur, grandeurs objectives

Enchaînement des cours
Questions ouvertes
Et après...

# Pour tous les milieux continus (fluides et solides)

Enchaînement des cours
Questions ouvertes
Et après...

1. Algèbre et analyse tensorielles : (en dimension 3)
   - opérations tensorielles : $+ \,,\, - \,,\, \otimes \,,\, \mathrm{tr} \,,\, \cdot \,,\, : \,,\, \cdots$
   - ordre 2 : $\mathbf{sym}$ / $\mathbf{asym}$ , $\mathbf{sph}$ / $\mathbf{dev}$ , spectre, invariants, positivité, orthogonalité, décomposition polaire ;
   - fonctions tensorielles, théorème des fonctions isotropes ;
   - champs tensoriels : $\mathbf{grad}$ , $\mathbf{div}$ , $\mathbf{rot}$ , $\boldsymbol{\Delta}$ .
2. Cinématique : (milieu continu, physique classique)
   - changement d'observateur, grandeurs objectives, relations universelles ;

# Pour tous les milieux continus (fluides et solides)



1. Algèbre et analyse tensorielles : (en dimension 3)
   - opérations tensorielles : $+, -, \otimes, \mathrm{tr}, \cdot, :, \cdots$
   - ordre 2 : $\mathbf{sym}$ / $\mathbf{asym}$ , $\mathbf{sph}$ / $\mathbf{dev}$ , spectre, invariants, positivité, orthogonalité, décomposition polaire ;
   - fonctions tensorielles, théorème des fonctions isotropes ;
   - champs tensoriels : $\mathbf{grad}$ , $\mathbf{div}$ , $\mathbf{rot}$ , $\boldsymbol{\Delta}$ .
2. Cinématique : (milieu continu, physique classique)
   - changement d'observateur, grandeurs objectives, relations universelles ;
   - tenseurs de déformation,

# Pour tous les milieux continus (fluides et solides)



1. Algèbre et analyse tensorielles : (en dimension 3)
   - opérations tensorielles : $+\,,-\,,\otimes\,,\mathrm{tr}\,,\cdot\,,:\,,\cdots$
   - ordre 2 : $\mathbf{sym}\,/\,\mathbf{asym}\,,\mathbf{sph}\,/\,\mathbf{dev}$ , spectre, invariants, positivité, orthogonalité, décomposition polaire ;
   - fonctions tensorielles, théorème des fonctions isotropes ;
   - champs tensoriels : $\mathbf{grad}\,,\mathbf{div}\,,\mathbf{rot}\,,\boldsymbol{\Delta}$.
2. Cinématique : (milieu continu, physique classique)
   - changement d'observateur, grandeurs objectives, relations universelles ;
   - tenseurs de déformation, tenseur des taux de déformation.

# Pour tous les milieux continus (fluides et solides)



1. Algèbre et analyse tensorielles : (en dimension 3)
   - opérations tensorielles : $+\,,-\,,\otimes\,,\mathrm{tr}\,,\cdot\,,:\,,\cdots$
   - ordre 2 : $\mathbf{sym}\;/\;\mathbf{asym}\;,\mathbf{sph}\;/\;\mathbf{dev}$ , spectre, invariants, positivité, orthogonalité, décomposition polaire ;
   - fonctions tensorielles, théorème des fonctions isotropes ;
   - champs tensoriels : $\mathbf{grad}\;,\mathbf{div}\;,\mathbf{rot}\;,\boldsymbol{\Delta}$.
2. Cinématique : (milieu continu, physique classique)
   - changement d'observateur, grandeurs objectives, relations universelles ;
   - tenseurs de déformation, tenseur des taux de déformation.
3. Équations générales :

# Pour tous les milieux continus (fluides et solides)



1. Algèbre et analyse tensorielles : (en dimension 3)
   - opérations tensorielles : $+\,,-\,,\otimes\,,\mathrm{tr}\,,\cdot\,,:\,,\cdots$
   - ordre 2 : $\mathbf{sym}$ / $\mathbf{asym}$ , $\mathbf{sph}$ / $\mathbf{dev}$ , spectre, invariants, positivité, orthogonalité, décomposition polaire ;
   - fonctions tensorielles, théorème des fonctions isotropes ;
   - champs tensoriels : $\mathbf{grad}\,,\mathbf{div}\,,\mathbf{rot}\,,\boldsymbol{\Delta}$.
2. Cinématique : (milieu continu, physique classique)
   - changement d'observateur, grandeurs objectives, relations universelles ;
   - tenseurs de déformation, tenseur des taux de déformation.
3. Équations générales : (milieu continu, physique classique)

# Pour tous les milieux continus (fluides et solides)



1. Algèbre et analyse tensorielles : (en dimension 3)
   - opérations tensorielles : $+ , - , \otimes , \mathrm{tr} , \cdot , : , \cdots$
   - ordre 2 : $\mathbf{sym}$ / $\mathbf{asym}$ , $\mathbf{sph}$ / $\mathbf{dev}$ , spectre, invariants, positivité, orthogonalité, décomposition polaire ;
   - fonctions tensorielles, théorème des fonctions isotropes ;
   - champs tensoriels : $\mathbf{grad}$ , $\mathbf{div}$ , $\mathbf{rot}$ , $\boldsymbol{\Delta}$ .
2. Cinématique : (milieu continu, physique classique)
   - changement d'observateur, grandeurs objectives, relations universelles ;
   - tenseurs de déformation, tenseur des taux de déformation.
3. Équations générales : (milieu continu, physique classique)
   - conservation de la masse : $\frac{\dot{\rho}}{\rho} = -\,\mathrm{tr}\boldsymbol{D}$

# Pour tous les milieux continus (fluides et solides)



1. Algèbre et analyse tensorielles : (en dimension 3)
   - opérations tensorielles : $+ , - , \otimes , \mathrm{tr} , \cdot , : , \cdots$
   - ordre 2 : $\mathbf{sym}$ / $\mathbf{asym}$ , $\mathbf{sph}$ / $\mathbf{dev}$ , spectre, invariants, positivité, orthogonalité, décomposition polaire ;
   - fonctions tensorielles, théorème des fonctions isotropes ;
   - champs tensoriels : $\mathbf{grad}$ , $\mathbf{div}$ , $\mathbf{rot}$ , $\boldsymbol{\Delta}$ .
2. Cinématique : (milieu continu, physique classique)
   - changement d'observateur, grandeurs objectives, relations universelles ;
   - tenseurs de déformation, tenseur des taux de déformation.
3. Équations générales : (milieu continu, physique classique)
   - conservation de la masse : $\frac{\dot{\rho}}{\rho} = -\mathrm{tr}\boldsymbol{D} \Leftrightarrow \frac{\rho_0}{\rho} = K_v$

# Pour tous les milieux continus (fluides et solides)



1. Algèbre et analyse tensorielles : (en dimension 3)
   - opérations tensorielles : $+\,,-\,,\otimes\,,\mathrm{tr}\,,\cdot\,,:\,,\cdots$
   - ordre 2 : $\mathbf{sym}\,/\,\mathbf{asym}\,,\mathbf{sph}\,/\,\mathbf{dev}$ , spectre, invariants, positivité, orthogonalité, décomposition polaire ;
   - fonctions tensorielles, théorème des fonctions isotropes ;
   - champs tensoriels : $\mathbf{grad}\,,\mathbf{div}\,,\mathbf{rot}\,,\boldsymbol{\Delta}$.
2. Cinématique : (milieu continu, physique classique)
   - changement d'observateur, grandeurs objectives, relations universelles ;
   - tenseurs de déformation, tenseur des taux de déformation.
3. Équations générales : (milieu continu, physique classique)
   - conservation de la masse : $\dfrac{\dot\rho}{\rho} = -\mathrm{tr}\boldsymbol{D} \;\Leftrightarrow\; \dfrac{\rho_0}{\rho} = K_v$
   - mécanique de Newton : $\mathbf{div}_E\,\boldsymbol{\sigma} + \rho\boldsymbol{f}_0^m = \rho\,\boldsymbol{\gamma}$

# Pour tous les milieux continus (fluides et solides)

1. Algèbre et analyse tensorielles : (en dimension 3)
   - opérations tensorielles : $+\,,-\,,\otimes\,,\mathrm{tr}\,,\cdot\,,:\,,\cdots$
   - ordre 2 : $\mathbf{sym}$ / $\mathbf{asym}$ , $\mathbf{sph}$ / $\mathbf{dev}$ , spectre, invariants, positivité, orthogonalité, décomposition polaire ;
   - fonctions tensorielles, théorème des fonctions isotropes ;
   - champs tensoriels : $\mathbf{grad}\,,\mathbf{div}\,,\mathbf{rot}\,,\boldsymbol{\Delta}$.
2. Cinématique : (milieu continu, physique classique)
   - changement d'observateur, grandeurs objectives, relations universelles ;
   - tenseurs de déformation, tenseur des taux de déformation.
3. Équations générales : (milieu continu, physique classique)
   - conservation de la masse : $\dfrac{\dot\rho}{\rho} = -\,\mathrm{tr}\boldsymbol{D} \;\Leftrightarrow\; \dfrac{\rho_0}{\rho} = K_v$
   - mécanique de Newton : $\mathbf{div}_E\,\boldsymbol{\sigma} + \rho\boldsymbol{f}_0^m = \rho\,\boldsymbol{\gamma}$
   - conservation de l'énergie : $\rho\,\dot e = \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{D} + r^v_{ext} - \mathrm{div}_E\,\boldsymbol{q}$

# Pour tous les milieux continus (fluides et solides)



1. Algèbre et analyse tensorielles : (en dimension 3)
   - opérations tensorielles : $+\,,-\,,\otimes\,,\mathrm{tr}\,,\cdot\,,:\,,\cdots$
   - ordre 2 : $\mathbf{sym}$ / $\mathbf{asym}$ , $\mathbf{sph}$ / $\mathbf{dev}$ , spectre, invariants, positivité, orthogonalité, décomposition polaire ;
   - fonctions tensorielles, théorème des fonctions isotropes ;
   - champs tensoriels : $\mathbf{grad}\,,\mathbf{div}\,,\mathbf{rot}\,,\boldsymbol{\Delta}$.
2. Cinématique : (milieu continu, physique classique)
   - changement d'observateur, grandeurs objectives, relations universelles ;
   - tenseurs de déformation, tenseur des taux de déformation.
3. Équations générales : (milieu continu, physique classique)
   - conservation de la masse : $\frac{\dot\rho}{\rho} = -\mathrm{tr}\boldsymbol{D} \;\Leftrightarrow\; \frac{\rho_0}{\rho} = K_v$
   - mécanique de Newton : $\mathbf{div}_E\,\boldsymbol{\sigma} + \rho\boldsymbol{f}_0^m = \rho\,\boldsymbol{\gamma}$
   - conservation de l'énergie : $\rho\,\dot e = \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{D} + r_{ext}^v - \mathrm{div}_E\,\boldsymbol{q}$
   - second principe de la thermodynamique :

$$\Phi = \underbrace{-\rho\,(\dot\psi^m + s^m\,\dot T) + \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{D}}_{\Phi_{int}}$$

# Pour tous les milieux continus (fluides et solides)



1. Algèbre et analyse tensorielles : (en dimension 3)
   - opérations tensorielles : $+\,,-\,,\otimes\,,\mathrm{tr}\,,\cdot\,,:\,,\cdots$
   - ordre 2 : $\mathbf{sym}$ / $\mathbf{asym}$ , $\mathbf{sph}$ / $\mathbf{dev}$ , spectre, invariants, positivité, orthogonalité, décomposition polaire ;
   - fonctions tensorielles, théorème des fonctions isotropes ;
   - champs tensoriels : $\mathbf{grad}\,,\mathbf{div}\,,\mathbf{rot}\,,\boldsymbol{\Delta}$.
2. Cinématique : (milieu continu, physique classique)
   - changement d'observateur, grandeurs objectives, relations universelles ;
   - tenseurs de déformation, tenseur des taux de déformation.
3. Équations générales : (milieu continu, physique classique)
   - conservation de la masse : $\frac{\dot\rho}{\rho} = -\mathrm{tr}\boldsymbol{D} \;\Leftrightarrow\; \frac{\rho_0}{\rho} = K_v$
   - mécanique de Newton : $\mathbf{div}_E\,\boldsymbol{\sigma} + \rho\boldsymbol{f}_0^m = \rho\,\boldsymbol{\gamma}$
   - conservation de l'énergie : $\rho\,\dot e = \boldsymbol{\sigma}:\boldsymbol{D} + r_{ext}^v - \mathrm{div}_E\,\boldsymbol{q}$
   - second principe de la thermodynamique :

$$\Phi = \underbrace{-\rho\,(\dot\psi^m + s^m\,\dot T) + \boldsymbol{\sigma}:\boldsymbol{D}}_{\Phi_{int}} \underbrace{-\frac{\boldsymbol{q}}{T}\cdot\mathbf{grad}\,T}_{\Phi_{th}\geqslant 0} \geqslant 0$$

# Pour tous les solides déformables

# Pour tous les solides déformables

4. Élasticité :

# Pour tous les solides déformables



4. Élasticité : (thermoélasticité,

# Pour tous les solides déformables

4. Élasticité : (thermoélasticité, déformations quelconques)

# Pour tous les solides déformables



4. Élasticité : (thermoélasticité, déformations quelconques)
   - définition thermodynamique de l'élasticité :

# Pour tous les solides déformables



4. Élasticité : (thermoélasticité, déformations quelconques)
   - définition thermodynamique de l'élasticité :
     - variables d'état : $\{T, \boldsymbol{X}, \{\boldsymbol{N}_t^{\bullet}\}\}$

# Pour tous les solides déformables



4. Élasticité : (thermoélasticité, déformations quelconques)
   - définition thermodynamique de l'élasticité :
     - variables d'état : $\{T, \boldsymbol{X}, \{\boldsymbol{N}_t^\bullet\}\}$ (pas de variables mnésiques)

# Pour tous les solides déformables



4. Élasticité : (thermoélasticité, déformations quelconques)
   - définition thermodynamique de l'élasticité :
     - variables d'état : $\{T, \boldsymbol{X}, \{\boldsymbol{N}_t^\bullet\}\}$ (pas de variables mnésiques)
     - $\Phi_{int} = 0$

# Pour tous les solides déformables



4. Élasticité : (thermoélasticité, déformations quelconques)
   - définition thermodynamique de l'élasticité :
     - variables d'état : $\{T, \boldsymbol{X}, \{\boldsymbol{N}_t^\bullet\}\}$ (pas de variables mnésiques)
     - $\Phi_{int} = 0$ (mais $\Phi_{th} \geqslant 0$)

# Pour tous les solides déformables



4. Élasticité : (thermoélasticité, déformations quelconques)
   - définition thermodynamique de l'élasticité :
     - variables d'état : $\{T, \boldsymbol{X}, \{\boldsymbol{N}_t^{\bullet}\}\}$ (pas de variables mnésiques)
     - $\Phi_{int} = 0$ (mais $\Phi_{th} \geqslant 0$)
     - $\boldsymbol{\sigma}$ est une fonction d'état.

# Pour tous les solides déformables



4. Élasticité : (thermoélasticité, déformations quelconques)
   - définition thermodynamique de l'élasticité :
     - variables d'état : $\{T, \boldsymbol{X}, \{\boldsymbol{N}_t^{\bullet}\}\}$ (pas de variables mnésiques)
     - $\Phi_{int} = 0$ (mais $\Phi_{th} \geqslant 0$)
     - $\boldsymbol{\sigma}$ est une fonction d'état.
   - solides isotropes,

# Pour tous les solides déformables



4. Élasticité : (thermoélasticité, déformations quelconques)
   - définition thermodynamique de l'élasticité :
     - variables d'état : $\{T, \boldsymbol{X}, \{\boldsymbol{N}_t^\bullet\}\}$ (pas de variables mnésiques)
     - $\Phi_{int} = 0$ (mais $\Phi_{th} \geqslant 0$)
     - $\boldsymbol{\sigma}$ est une fonction d'état.
   - solides isotropes, (pas de direction d'anisotropie)

# Pour tous les solides déformables



4. Élasticité : (thermoélasticité, déformations quelconques)
   - définition thermodynamique de l'élasticité :
     - variables d'état : $\{T, \boldsymbol{X}, \{\boldsymbol{N}_i^\bullet\}\}$ (pas de variables mnésiques)
     - $\Phi_{int} = 0$ (mais $\Phi_{th} \geqslant 0$)
     - $\boldsymbol{\sigma}$ est une fonction d'état.
   - solides isotropes, (pas de direction d'anisotropie)
   - solides isotropes transverses,

# Pour tous les solides déformables

Enchaînement des cours
Questions ouvertes
Et après...

4. Élasticité : (thermoélasticité, déformations quelconques)
   - définition thermodynamique de l'élasticité :
     - variables d'état : $\{T, \boldsymbol{X}, \{\boldsymbol{N}_t^\bullet\}\}$ (pas de variables mnésiques)
     - $\Phi_{int} = 0$ (mais $\Phi_{th} \geqslant 0$)
     - $\boldsymbol{\sigma}$ est une fonction d'état.
   - solides isotropes, (pas de direction d'anisotropie)
   - solides isotropes transverses, (une seule direction d'anisotropie)

# Pour tous les solides déformables



4. Élasticité : (thermoélasticité, déformations quelconques)
   - définition thermodynamique de l'élasticité :
     - variables d'état : $\{T, \boldsymbol{X}, \{\boldsymbol{N}_t^\bullet\}\}$ (pas de variables mnésiques)
     - $\Phi_{int} = 0$ (mais $\Phi_{th} \geqslant 0$)
     - $\boldsymbol{\sigma}$ est une fonction d'état.
   - solides isotropes, (pas de direction d'anisotropie)
   - solides isotropes transverses, (une seule direction d'anisotropie)
   - élasticité générique ;

# Pour tous les solides déformables



4. Élasticité : (thermoélasticité, déformations quelconques)
   - définition thermodynamique de l'élasticité :
     - variables d'état : $\{T, \boldsymbol{X}, \{\boldsymbol{N}_t^\bullet\}\}$ (pas de variables mnésiques)
     - $\Phi_{int} = 0$ (mais $\Phi_{th} \geqslant 0$)
     - $\boldsymbol{\sigma}$ est une fonction d'état.
   - solides isotropes, (pas de direction d'anisotropie)
   - solides isotropes transverses, (une seule direction d'anisotropie)
   - élasticité générique ; (toutes anisotropies)

# Pour tous les solides déformables



4. Élasticité : (thermoélasticité, déformations quelconques)
   - définition thermodynamique de l'élasticité :
     - variables d'état : $\{T, \boldsymbol{X}, \{\boldsymbol{N}_t^\bullet\}\}$ (pas de variables mnésiques)
     - $\Phi_{int} = 0$ (mais $\Phi_{th} \geqslant 0$)
     - $\boldsymbol{\sigma}$ est une fonction d'état.
   - solides isotropes, (pas de direction d'anisotropie)
   - solides isotropes transverses, (une seule direction d'anisotropie)
   - élasticité générique ; (toutes anisotropies)
5. Inélasticité :

# Pour tous les solides déformables



4. Élasticité : (thermoélasticité, déformations quelconques)
   - définition thermodynamique de l'élasticité :
     - variables d'état : $\{T, \boldsymbol{X}, \{\boldsymbol{N}_t^\bullet\}\}$ (pas de variables mnésiques)
     - $\Phi_{int} = 0$ (mais $\Phi_{th} \geqslant 0$)
     - $\boldsymbol{\sigma}$ est une fonction d'état.
   - solides isotropes, (pas de direction d'anisotropie)
   - solides isotropes transverses, (une seule direction d'anisotropie)
   - élasticité générique ; (toutes anisotropies)

5. Inélasticité : (thermo-inélasticité,

# Pour tous les solides déformables



4. Élasticité : (thermoélasticité, déformations quelconques)
   - définition thermodynamique de l'élasticité :
     - variables d'état : $\{T, \boldsymbol{X}, \{\boldsymbol{N}_i^\bullet\}\}$ (pas de variables mnésiques)
     - $\Phi_{int} = 0$ (mais $\Phi_{th} \geqslant 0$)
     - $\boldsymbol{\sigma}$ est une fonction d'état.
   - solides isotropes, (pas de direction d'anisotropie)
   - solides isotropes transverses, (une seule direction d'anisotropie)
   - élasticité générique ; (toutes anisotropies)

5. Inélasticité : (thermo-inélasticité, déformations quelconques,

# Pour tous les solides déformables



4. Élasticité : (thermoélasticité, déformations quelconques)
   - définition thermodynamique de l'élasticité :
     - variables d'état : $\{T, \boldsymbol{X}, \{\boldsymbol{N}_t^\bullet\}\}$ (pas de variables mnésiques)
     - $\Phi_{int} = 0$ (mais $\Phi_{th} \geqslant 0$)
     - $\boldsymbol{\sigma}$ est une fonction d'état.
   - solides isotropes, (pas de direction d'anisotropie)
   - solides isotropes transverses, (une seule direction d'anisotropie)
   - élasticité générique ; (toutes anisotropies)

5. Inélasticité : (thermo-inélasticité, déformations quelconques, toutes anisotropies)

# Pour tous les solides déformables



4. Élasticité : (thermoélasticité, déformations quelconques)
   - définition thermodynamique de l'élasticité :
     - variables d'état : $\{T, \boldsymbol{X}, \{\boldsymbol{N}_i^\bullet\}\}$ (pas de variables mnésiques)
     - $\Phi_{int} = 0$ (mais $\Phi_{th} \geqslant 0$)
     - $\boldsymbol{\sigma}$ est une fonction d'état.
   - solides isotropes, (pas de direction d'anisotropie)
   - solides isotropes transverses, (une seule direction d'anisotropie)
   - élasticité générique ; (toutes anisotropies)

5. Inélasticité : (thermo-inélasticité, déformations quelconques, toutes anisotropies)
   - définition : non élastique

# Pour tous les solides déformables



4. Élasticité : (thermoélasticité, déformations quelconques)
   - définition thermodynamique de l'élasticité :
     - variables d'état : $\{T, \boldsymbol{X}, \{\boldsymbol{N}_t^\bullet\}\}$ (pas de variables mnésiques)
     - $\Phi_{int} = 0$ (mais $\Phi_{th} \geqslant 0$)
     - $\boldsymbol{\sigma}$ est une fonction d'état.
   - solides isotropes, (pas de direction d'anisotropie)
   - solides isotropes transverses, (une seule direction d'anisotropie)
   - élasticité générique ; (toutes anisotropies)

5. Inélasticité : (thermo-inélasticité, déformations quelconques, toutes anisotropies)
   - définition : non élastique (négation d'un des axiomes de l'élasticité)

# Pour tous les solides déformables



4. Élasticité : (thermoélasticité, déformations quelconques)
   - définition thermodynamique de l'élasticité :
     - variables d'état : $\{T, \boldsymbol{X}, \{\boldsymbol{N}_t^\bullet\}\}$ (pas de variables mnésiques)
     - $\Phi_{int} = 0$ (mais $\Phi_{th} \geqslant 0$)
     - $\boldsymbol{\sigma}$ est une fonction d'état.
   - solides isotropes, (pas de direction d'anisotropie)
   - solides isotropes transverses, (une seule direction d'anisotropie)
   - élasticité générique ; (toutes anisotropies)
5. Inélasticité : (thermo-inélasticité, déformations quelconques, toutes anisotropies)
   - définition : non élastique (négation d'un des axiomes de l'élasticité)
   - sans variable mnésique,

# Pour tous les solides déformables



4. Élasticité : (thermoélasticité, déformations quelconques)
   - définition thermodynamique de l'élasticité :
     - variables d'état : $\{T, \boldsymbol{X}, \{\boldsymbol{N}_t^\bullet\}\}$ (pas de variables mnésiques)
     - $\Phi_{int} = 0$ (mais $\Phi_{th} \geqslant 0$)
     - $\boldsymbol{\sigma}$ est une fonction d'état.
   - solides isotropes, (pas de direction d'anisotropie)
   - solides isotropes transverses, (une seule direction d'anisotropie)
   - élasticité générique ; (toutes anisotropies)

5. Inélasticité : (thermo-inélasticité, déformations quelconques, toutes anisotropies)
   - définition : non élastique (négation d'un des axiomes de l'élasticité)
   - sans variable mnésique, (viscoélasticité)

# Pour tous les solides déformables



4. Élasticité : (thermoélasticité, déformations quelconques)
   - définition thermodynamique de l'élasticité :
     - variables d'état : $\{T, \boldsymbol{X}, \{\boldsymbol{N}_t^\bullet\}\}$ (pas de variables mnésiques)
     - $\Phi_{int} = 0$ (mais $\Phi_{th} \geqslant 0$)
     - $\boldsymbol{\sigma}$ est une fonction d'état.
   - solides isotropes, (pas de direction d'anisotropie)
   - solides isotropes transverses, (une seule direction d'anisotropie)
   - élasticité générique ; (toutes anisotropies)

5. Inélasticité : (thermo-inélasticité, déformations quelconques, toutes anisotropies)
   - définition : non élastique (négation d'un des axiomes de l'élasticité)
   - sans variable mnésique, (viscoélasticité)
   - une seule variable mnésique,

# Pour tous les solides déformables



4. Élasticité : (thermoélasticité, déformations quelconques)
   - définition thermodynamique de l'élasticité :
     - variables d'état : $\{T, \boldsymbol{X}, \{\boldsymbol{N}_t^\bullet\}\}$ (pas de variables mnésiques)
     - $\Phi_{int} = 0$ (mais $\Phi_{th} \geqslant 0$)
     - $\boldsymbol{\sigma}$ est une fonction d'état.
   - solides isotropes, (pas de direction d'anisotropie)
   - solides isotropes transverses, (une seule direction d'anisotropie)
   - élasticité générique ; (toutes anisotropies)

5. Inélasticité : (thermo-inélasticité, déformations quelconques, toutes anisotropies)
   - définition : non élastique (négation d'un des axiomes de l'élasticité)
   - sans variable mnésique, (viscoélasticité)
   - une seule variable mnésique, (plasticité, endommagement)

# Pour tous les solides déformables



4. Élasticité : (thermoélasticité, déformations quelconques)
   - définition thermodynamique de l'élasticité :
     - variables d'état : $\{T, \boldsymbol{X}, \{\boldsymbol{N}_t^{\bullet}\}\}$ (pas de variables mnésiques)
     - $\Phi_{int} = 0$ (mais $\Phi_{th} \geqslant 0$)
     - $\boldsymbol{\sigma}$ est une fonction d'état.
   - solides isotropes, (pas de direction d'anisotropie)
   - solides isotropes transverses, (une seule direction d'anisotropie)
   - élasticité générique ; (toutes anisotropies)

5. Inélasticité : (thermo-inélasticité, déformations quelconques, toutes anisotropies)
   - définition : non élastique (négation d'un des axiomes de l'élasticité)
   - sans variable mnésique, (viscoélasticité)
   - une seule variable mnésique, (plasticité, endommagement)
   - plusieurs variables mnésiques,

# Pour tous les solides déformables



4. Élasticité : (thermoélasticité, déformations quelconques)
   - définition thermodynamique de l'élasticité :
     - variables d'état : $\{T, \boldsymbol{X}, \{\boldsymbol{N}_t^\bullet\}\}$ (pas de variables mnésiques)
     - $\Phi_{int} = 0$ (mais $\Phi_{th} \geqslant 0$)
     - $\boldsymbol{\sigma}$ est une fonction d'état.
   - solides isotropes, (pas de direction d'anisotropie)
   - solides isotropes transverses, (une seule direction d'anisotropie)
   - élasticité générique ; (toutes anisotropies)

5. Inélasticité : (thermo-inélasticité, déformations quelconques, toutes anisotropies)
   - définition : non élastique (négation d'un des axiomes de l'élasticité)
   - sans variable mnésique, (viscoélasticité)
   - une seule variable mnésique, (plasticité, endommagement)
   - plusieurs variables mnésiques, (comportements complexes)

# Quelques questions non abordées

# Quelques questions non abordées

- Milieux monoconstituants à comportement complexe.

# Quelques questions non abordées



- Milieux monoconstituants à comportement complexe.
  Ex. dans les élastomères :

# Quelques questions non abordées



- Milieux monoconstituants à comportement complexe.
  Ex. dans les élastomères : « effet » Mullins,

# Quelques questions non abordées



- Milieux monoconstituants à comportement complexe.
  Ex. dans les élastomères : « effet » Mullins, « effet » Payne.

# Quelques questions non abordées

- Milieux monoconstituants à comportement complexe.
  Ex. dans les élastomères : « effet » Mullins, « effet » Payne.
- Milieux continus multiconstituants :

# Quelques questions non abordées



- Milieux monoconstituants à comportement complexe.
  Ex. dans les élastomères : « effet » Mullins, « effet » Payne.
- Milieux continus multiconstituants : (multiphasiques)

# Quelques questions non abordées



- Milieux monoconstituants à comportement complexe.
  Ex. dans les élastomères : « effet » Mullins, « effet » Payne.
- Milieux continus multiconstituants : (multiphasiques)
  - Il faut des variables d'état non mnésiques en plus :

# Quelques questions non abordées



- Milieux monoconstituants à comportement complexe.
  Ex. dans les élastomères : « effet » Mullins, « effet » Payne.
- Milieux continus multiconstituants : (multiphasiques)
  - Il faut des variables d'état non mnésiques en plus :
    les concentrations actuelles de $n-1$ constituants,

# Quelques questions non abordées



- Milieux monoconstituants à comportement complexe.
  Ex. dans les élastomères : « effet » Mullins, « effet » Payne.
- Milieux continus multiconstituants : (multiphasiques)
  - Il faut des variables d'état non mnésiques en plus : les concentrations actuelles de $n-1$ constituants,
  - Les variations de concentration peuvent être exothermiques ou endothermiques.

# Quelques questions non abordées



- Milieux monoconstituants à comportement complexe.
  Ex. dans les élastomères : « effet » Mullins, « effet » Payne.
- Milieux continus multiconstituants : (multiphasiques)
  - Il faut des variables d'état non mnésiques en plus : les concentrations actuelles de $n-1$ constituants,
  - Les variations de concentration peuvent être exothermiques ou endothermiques.
    Elles induisent donc une dissipation intrinsèque.

# Quelques questions non abordées



- Milieux monoconstituants à comportement complexe.
  Ex. dans les élastomères : « effet » Mullins, « effet » Payne.
- Milieux continus multiconstituants : (multiphasiques)
  - Il faut des variables d'état non mnésiques en plus : les concentrations actuelles de $n-1$ constituants,
  - Les variations de concentration peuvent être exothermiques ou endothermiques.
    Elles induisent donc une dissipation intrinsèque.
  - Définition des efforts intérieurs.

# Quelques questions non abordées



- Milieux monoconstituants à comportement complexe.
  Ex. dans les élastomères : « effet » Mullins, « effet » Payne.
- Milieux continus multiconstituants : (multiphasiques)
  - Il faut des variables d'état non mnésiques en plus : les concentrations actuelles de $n-1$ constituants,
  - Les variations de concentration peuvent être exothermiques ou endothermiques.
    Elles induisent donc une dissipation intrinsèque.
  - Définition des efforts intérieurs. (un ou plusieurs tenseurs ?)

# Quelques questions non abordées



- Milieux monoconstituants à comportement complexe.
  Ex. dans les élastomères : « effet » Mullins, « effet » Payne.
- Milieux continus multiconstituants : (multiphasiques)
  - Il faut des variables d'état non mnésiques en plus :
    les concentrations actuelles de $n-1$ constituants,
  - Les variations de concentration peuvent être exothermiques ou endothermiques.
    Elles induisent donc une dissipation intrinsèque.
  - Définition des efforts intérieurs. (un ou plusieurs tenseurs ?)
- Matériaux à « mémoire de forme ».

# Quelques questions non abordées



- Milieux monoconstituants à comportement complexe.
  Ex. dans les élastomères : « effet » Mullins, « effet » Payne.
- Milieux continus multiconstituants : (multiphasiques)
  - Il faut des variables d'état non mnésiques en plus :
    les concentrations actuelles de $n-1$ constituants,
  - Les variations de concentration peuvent être exothermiques ou endothermiques.
    Elles induisent donc une dissipation intrinsèque.
  - Définition des efforts intérieurs. (un ou plusieurs tenseurs ?)
- Matériaux à « mémoire de forme ».
- Milieux granulaires.

# Quelques questions non abordées



- Milieux monoconstituants à comportement complexe.
  Ex. dans les élastomères : « effet » Mullins, « effet » Payne.
- Milieux continus multiconstituants : (multiphasiques)
  - Il faut des variables d'état non mnésiques en plus : les concentrations actuelles de $n-1$ constituants,
  - Les variations de concentration peuvent être exothermiques ou endothermiques.
    Elles induisent donc une dissipation intrinsèque.
  - Définition des efforts intérieurs. (un ou plusieurs tenseurs ?)
- Matériaux à « mémoire de forme ».
- Milieux granulaires. (peut-on les traiter comme des milieux continus ?)

# Quelques questions non abordées



- Milieux monoconstituants à comportement complexe.
  Ex. dans les élastomères : « effet » Mullins, « effet » Payne.
- Milieux continus multiconstituants : (multiphasiques)
  - Il faut des variables d'état non mnésiques en plus : les concentrations actuelles de $n-1$ constituants,
  - Les variations de concentration peuvent être exothermiques ou endothermiques.
    Elles induisent donc une dissipation intrinsèque.
  - Définition des efforts intérieurs. (un ou plusieurs tenseurs ?)
- Matériaux à « mémoire de forme ».
- Milieux granulaires. (peut-on les traiter comme des milieux continus ?)
- Milieux « polarisés ».

# Quelques questions non abordées



- Milieux monoconstituants à comportement complexe.
  Ex. dans les élastomères : « effet » Mullins, « effet » Payne.
- Milieux continus multiconstituants : (multiphasiques)
  - Il faut des variables d'état non mnésiques en plus : les concentrations actuelles de $n-1$ constituants,
  - Les variations de concentration peuvent être exothermiques ou endothermiques.
    Elles induisent donc une dissipation intrinsèque.
  - Définition des efforts intérieurs. (un ou plusieurs tenseurs ?)
- Matériaux à « mémoire de forme ».
- Milieux granulaires. (peut-on les traiter comme des milieux continus ?)
- Milieux « polarisés ». (milieux électromagnétiques, piézoélectricité)

# Quelques questions non abordées

Enchaînement des cours
Questions ouvertes
Et après...

- Milieux monoconstituants à comportement complexe.
  Ex. dans les élastomères : « effet » Mullins, « effet » Payne.
- Milieux continus multiconstituants : (multiphasiques)
  - Il faut des variables d'état non mnésiques en plus :
    les concentrations actuelles de $n-1$ constituants,
  - Les variations de concentration peuvent être exothermiques ou endothermiques.
    Elles induisent donc une dissipation intrinsèque.
  - Définition des efforts intérieurs. (un ou plusieurs tenseurs ?)
- Matériaux à « mémoire de forme ».
- Milieux granulaires. (peut-on les traiter comme des milieux continus ?)
- Milieux « polarisés ». (milieux électromagnétiques, piézoélectricité)
- ...

# Quelques questions non abordées



- Milieux monoconstituants à comportement complexe.
  Ex. dans les élastomères : « effet » Mullins, « effet » Payne.
- Milieux continus multiconstituants : (multiphasiques)
  - Il faut des variables d'état non mnésiques en plus : les concentrations actuelles de $n-1$ constituants,
  - Les variations de concentration peuvent être exothermiques ou endothermiques.
    Elles induisent donc une dissipation intrinsèque.
  - Définition des efforts intérieurs. (un ou plusieurs tenseurs ?)
- Matériaux à « mémoire de forme ».
- Milieux granulaires. (peut-on les traiter comme des milieux continus ?)
- Milieux « polarisés ». (milieux électromagnétiques, piézoélectricité)
- ...

Il reste donc du travail à faire ...

# Place aux jeunes !

# Place aux jeunes !



La suite est à développer :

# Place aux jeunes !



La suite est à développer : questions ouvertes,

# Place aux jeunes !



La suite est à développer : questions ouvertes, matériaux nouveaux...

# Place aux jeunes !



La suite est à développer : questions ouvertes, matériaux nouveaux...

## Suggestion de deux recommandations :

# Place aux jeunes !



La suite est à développer : questions ouvertes, matériaux nouveaux...

## Suggestion de deux recommandations :

- Ne rien croire sur parole :

# Place aux jeunes !



La suite est à développer : questions ouvertes, matériaux nouveaux...

## Suggestion de deux recommandations :

- Ne rien croire sur parole : (recommandation salutaire !)

# Place aux jeunes !



La suite est à développer : questions ouvertes, matériaux nouveaux...

## Suggestion de deux recommandations :

- Ne rien croire sur parole : (recommandation salutaire !)
  - Les publications scientifiques sont parfois douteuses :

# Place aux jeunes !



La suite est à développer : questions ouvertes, matériaux nouveaux...

## Suggestion de deux recommandations :

- Ne rien croire sur parole : (recommandation salutaire !)
  - Les publications scientifiques sont parfois douteuses : les vérifier, voire les critiquer.

# Place aux jeunes !

Enchaînement des cours
Questions ouvertes
Et après...

La suite est à développer : questions ouvertes, matériaux nouveaux...

## Suggestion de deux recommandations :

- Ne rien croire sur parole : (recommandation salutaire !)
  - Les publications scientifiques sont parfois douteuses : les vérifier, voire les critiquer. (hypothèses cachées, sous-entendus)

# Place aux jeunes !



La suite est à développer : questions ouvertes, matériaux nouveaux...

## Suggestion de deux recommandations :

- Ne rien croire sur parole : (recommandation salutaire !)
  - Les publications scientifiques sont parfois douteuses : les vérifier, voire les critiquer. (hypothèses cachées, sous-entendus)
  - Ne vous soumettez pas paresseusement aux arguments d'autorité ou à la tradition.

# Place aux jeunes !



La suite est à développer : questions ouvertes, matériaux nouveaux...

## Suggestion de deux recommandations :

- Ne rien croire sur parole : (recommandation salutaire !)
  - Les publications scientifiques sont parfois douteuses : les vérifier, voire les critiquer. (hypothèses cachées, sous-entendus)
  - Ne vous soumettez pas paresseusement aux arguments d'autorité ou à la tradition. (garder un esprit critique constructif)

# Place aux jeunes !



La suite est à développer : questions ouvertes, matériaux nouveaux...

## Suggestion de deux recommandations :

- Ne rien croire sur parole : (recommandation salutaire !)
    - Les publications scientifiques sont parfois douteuses : les vérifier, voire les critiquer. (hypothèses cachées, sous-entendus)
    - Ne vous soumettez pas paresseusement aux arguments d'autorité ou à la tradition. (garder un esprit critique constructif)
    - La « loi de la majorité » n'a aucune valeur en sciences.

# Place aux jeunes !



La suite est à développer : questions ouvertes, matériaux nouveaux...

## Suggestion de deux recommandations :

- Ne rien croire sur parole : (recommandation salutaire !)
  - Les publications scientifiques sont parfois douteuses : les vérifier, voire les critiquer. (hypothèses cachées, sous-entendus)
  - Ne vous soumettez pas paresseusement aux arguments d'autorité ou à la tradition. (garder un esprit critique constructif)
  - La « loi de la majorité » n'a aucune valeur en sciences.
- Pratiquer l'honnêteté intellectuelle :

# Place aux jeunes !



La suite est à développer : questions ouvertes, matériaux nouveaux...

## Suggestion de deux recommandations :

- Ne rien croire sur parole : (recommandation salutaire !)
  - Les publications scientifiques sont parfois douteuses : les vérifier, voire les critiquer. (hypothèses cachées, sous-entendus)
  - Ne vous soumettez pas paresseusement aux arguments d'autorité ou à la tradition. (garder un esprit critique constructif)
  - La « loi de la majorité » n'a aucune valeur en sciences.
- Pratiquer l'honnêteté intellectuelle :
  - Mettez en évidence vos hypothèses ou vos conjectures.

# Place aux jeunes !



La suite est à développer : questions ouvertes, matériaux nouveaux...

## Suggestion de deux recommandations :

- Ne rien croire sur parole : (recommandation salutaire !)
  - Les publications scientifiques sont parfois douteuses : les vérifier, voire les critiquer. (hypothèses cachées, sous-entendus)
  - Ne vous soumettez pas paresseusement aux arguments d'autorité ou à la tradition. (garder un esprit critique constructif)
  - La « loi de la majorité » n'a aucune valeur en sciences.
- Pratiquer l'honnêteté intellectuelle :
  - Mettez en évidence vos hypothèses ou vos conjectures.
  - Pratiquez une rigueur théorique (démonstrations)

# Place aux jeunes !



La suite est à développer : questions ouvertes, matériaux nouveaux...

## Suggestion de deux recommandations :

- Ne rien croire sur parole : (recommandation salutaire !)
  - Les publications scientifiques sont parfois douteuses : les vérifier, voire les critiquer. (hypothèses cachées, sous-entendus)
  - Ne vous soumettez pas paresseusement aux arguments d'autorité ou à la tradition. (garder un esprit critique constructif)
  - La « loi de la majorité » n'a aucune valeur en sciences.
- Pratiquer l'honnêteté intellectuelle :
  - Mettez en évidence vos hypothèses ou vos conjectures.
  - Pratiquez une rigueur théorique (démonstrations) et expérimentale (danger d'interprétations abusives).

# Place aux jeunes !



La suite est à développer : questions ouvertes, matériaux nouveaux...

## Suggestion de deux recommandations :

- Ne rien croire sur parole : (recommandation salutaire !)
  - Les publications scientifiques sont parfois douteuses : les vérifier, voire les critiquer. (hypothèses cachées, sous-entendus)
  - Ne vous soumettez pas paresseusement aux arguments d'autorité ou à la tradition. (garder un esprit critique constructif)
  - La « loi de la majorité » n'a aucune valeur en sciences.
- Pratiquer l'honnêteté intellectuelle :
  - Mettez en évidence vos hypothèses ou vos conjectures.
  - Pratiquez une rigueur théorique (démonstrations) et expérimentale (danger d'interprétations abusives).
  - La malhonnêteté est nuisible à tous et à l'avenir !

J'espère vous avoir donné l'envie de poursuivre.

J'espère vous avoir donné l'envie de poursuivre.

Merci de votre attention.