



laboratoire de mécanique et d'acoustique

Comportement élastique (thermo-élasticité en déformations finies)

Jean Garrigues

`mailto:jean.garrigues@centrale-marseille.fr`

`http://jean.garrigues.perso.centrale-marseille.fr/`

Jeudi 8 et jeudi 15 juin 2017





Au programme...

- Concepts fondamentaux ▶
- Élasticité isotrope ▶
- Pseudo-élasticité de Hooke ▶
- Élasticité isotrope transverse ▶
- Élasticité générique ▶
- Le problème élastique ▶
- Illustrations numériques ▶
- Synthèse ▶



Rappels et
notations

Solide
déformable

Solide
élastique

Première partie

Concepts fondamentaux

Rappels et notations

Pour tous les modèles de milieux continus :

- **choix des variables d'état** : $\{T, \boldsymbol{\chi}_1, \dots, \boldsymbol{\chi}_n\} \Leftrightarrow \{T, I_1, \dots, I_m\}$
(objectives et indépendantes)

- **fonction d'état énergie interne massique** :

$$e^m = f_e(T, \{\boldsymbol{\chi}_\bullet\}) = \bar{f}_e(T, \{I_\bullet\}) \quad (\text{premier principe de la thermodynamique})$$

- **fonction d'état entropie massique** :

$$s^m = f_s(T, \{\boldsymbol{\chi}_\bullet\}) = \bar{f}_s(T, \{I_\bullet\}) \quad (\text{second principe de la thermodynamique})$$

- **énergie libre massique de Helmholtz** :

$$\psi^m = e^m - T s^m = f_\psi(T, \{\boldsymbol{\chi}_\bullet\}) = \bar{f}_\psi(T, \{I_\bullet\}) \quad (\text{fonction d'état auxiliaire})$$

- **les deux inégalités du second principe** : (dissipations)

$$\Phi_{th} = \frac{\mathbf{q} \cdot (-\mathbf{grad}_E T)}{T} \geq 0 \quad \text{et} \quad \Phi = \underbrace{\rho (\dot{\psi}^m + s^m \dot{T}) - \mathcal{P}_{int}^{vmec}}_{\Phi_{int}} + \Phi_{th} \geq 0$$

Ces grandeurs sont des champs matériels, que l'on peut décrire par la méthode de Lagrange ou d'Euler : $\Psi(P, t) = \Psi_L(\mathbf{x}_0, t) = \Psi_E(\mathbf{x}_t, t)$

Solide déformable

Définition d'un solide déformable

∃ une forme propre servant de référence pour les déformations.

(le choix de la forme propre est sous la responsabilité de l'ingénieur)

Variables d'état : (état actuel d'une particule du solide déformable)

- la température actuelle T ; (imposée par le second principe)
- un tenseur de déformation actuelle \mathbf{x} objectif;
- d'éventuelles directions actuelles d'anisotropie $\{\mathbf{N}_t^\bullet\}$;
- d'éventuelles variables mnésiques actuelles $\{\boldsymbol{\alpha}_t^\bullet\}$.

Puissance volumique actuelle des efforts intérieurs

$$\mathcal{P}_{int}^{vmec} \simeq -\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} \quad (\text{la puissance des efforts intérieurs à distance est négligée})$$

Hypothèses de l'élasticité

① Variables d'état :

- la température actuelle T ; (thermodynamique)
- un tenseur de déformation actuelle \mathbf{X} objectif; (solide déf.)
- d'éventuelles directions actuelles d'anisotropie $\{\mathbf{N}_i^\bullet\}$;
- **absence de variables d'état mnésiques.**
(la réponse sthénique actuelle ne dépend pas du chemin suivi dans l'espace des états)

② Dissipations :

Dans toute évolution :

- **dissipation intrinsèque Φ_{int} nulle,** (phases stables, pas de frottement)
- dissipation thermique *a priori* non nulle. ($\text{grad}_E T \neq 0$)

③ Le tenseur des contraintes est une **fonction d'état** :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{f}_\sigma(T, \mathbf{X}, \{\mathbf{N}_i^\bullet\}) \quad (\text{la contrainte actuelle ne dépend que de l'état actuel})$$

Un modèle de solide déformable est dit élastique s'il satisfait ces trois conditions.



Variables
d'état

Comportement
thermique

Relation de
Helmholtz

Comportement
mécanique

Comportement
incrémental

Limite
élastique

Synthèse

Exemple de
modèle

Seconde partie

Élasticité isotrope

Variables d'état en élasticité isotrope

Élasticité isotrope

Élasticité sans direction d'anisotropie dans les variables d'état.

Les variables d'état tensorielles sont seulement : $\{T, \mathbf{X}\}$

Les variables d'état scalaires sont : $\{T, X_I, X_{II}, X_{III}\}$ (par exemple)

Remarque : on peut remplacer le triplet de réels $\{X_I, X_{II}, X_{III}\}$ par un autre ensemble $\{I_1, I_2, I_3\}$ cinématiquement plus significatif, mais toujours indépendants (\exists une bijection $\{X_I, X_{II}, X_{III}\} \leftrightarrow \{I_1, I_2, I_3\}$).

Fonctions d'état fondamentales : (postulées par les deux principes)

$$e^m = \bar{f}_e(T, X_I, X_{II}, X_{III})$$

$$e^m = \partial_T \bar{f}_e \dot{T} + \partial_{X_I} \bar{f}_e \dot{X}_I + \partial_{X_{II}} \bar{f}_e \dot{X}_{II} + \partial_{X_{III}} \bar{f}_e \dot{X}_{III}$$

$$s^m = \bar{f}_s(T, X_I, X_{II}, X_{III})$$

$$s^m = \partial_T \bar{f}_s \dot{T} + \partial_{X_I} \bar{f}_s \dot{X}_I + \partial_{X_{II}} \bar{f}_s \dot{X}_{II} + \partial_{X_{III}} \bar{f}_s \dot{X}_{III}$$

Fonction d'état auxiliaire :

$$\Psi^m = e^m - T s^m$$

$$\psi^m = \bar{f}_\psi(T, X_I, X_{II}, X_{III})$$

$$\psi^m = \partial_T \bar{f}_\psi \dot{T} + \partial_{X_I} \bar{f}_\psi \dot{X}_I + \partial_{X_{II}} \bar{f}_\psi \dot{X}_{II} + \partial_{X_{III}} \bar{f}_\psi \dot{X}_{III}$$

Élasticité : (rappel)

$\Phi_{int} = 0$ dans toute évolution

et $\boldsymbol{\sigma}$ est une fonction d'état : $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{f}_\sigma(T, \mathbf{X})$

Comportement thermique

Dissipation thermique non négative : (second principe de la thermo.)

$\forall \mathbf{grad}_E T, \Phi_{th} = \frac{\mathbf{q} \cdot (-\mathbf{grad}_E T)}{T} \geq 0 \Rightarrow \exists \mathbf{f}_q$ t.q. $\mathbf{q} = \mathbf{f}_q(\mathbf{grad}_E T, T, \mathbf{X})$
 où le courant de chaleur \mathbf{q} et les arguments de \mathbf{f}_q sont objectifs.
 La fonction vectorielle \mathbf{f}_q est donc isotrope. (au sens mathématique)

Comportement thermique général en élasticité isotrope :

$$\mathbf{q} = \mathbf{f}_q(\mathbf{grad}_E T, T, \mathbf{X}) \\ = \bar{\mathbf{f}}_q(\|\mathbf{grad}_E T\|, T, X_I, X_{II}, X_{III}, \mathbf{grad}_E T \cdot \mathbf{X} \cdot \mathbf{grad}_E T, \mathbf{grad}_E T \cdot \mathbf{X}^2 \cdot \mathbf{grad}_E T)$$

Exemple de loi de conduction thermique :

Pour garantir la non négativité de la dissipation thermique, on peut choisir :

$$\mathbf{q} = -\alpha(\dots) \mathbf{grad}_E T \quad \text{avec} \quad \alpha(\dots) \geq 0 \quad (\text{on a bien } \Phi_{th} \geq 0)$$

La fonction $\alpha(\dots)$ doit être d'origine expérimentale (ou idéalisée).

D'autres choix pour \mathbf{f}_q sont possibles...

Relation de Helmholtz

Dissipation intrinsèque nulle : (une des conditions de l'élasticité)

$$\Phi_{int} = -\rho (\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s) \dot{T} - \underbrace{\rho \partial_{X_I} \bar{f}_\psi \dot{X}_I - \rho \partial_{X_{II}} \bar{f}_\psi \dot{X}_{II} - \rho \partial_{X_{III}} \bar{f}_\psi \dot{X}_{III}}_{g(T, X_I, X_{II}, X_{III}, \dot{X}_I, \dot{X}_{II}, \dot{X}_{III}, \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{D})} + \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} = 0$$

$g(T, X_I, X_{II}, X_{III}, \dot{X}_I, \dot{X}_{II}, \dot{X}_{III}, \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{D})$ (n'est pas fonction de \dot{T})

Relation de Helmholtz :

$$\forall \dot{T}, \quad \Phi_{int} = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s = 0$$

Il suffit d'une seule fonction d'état (\bar{f}_ψ , \bar{f}_e ou \bar{f}_s) pour définir un modèle élastique isotrope.

La dissipation intrinsèque se réduit à :

$$\Phi_{int} = -\rho \partial_{X_I} \bar{f}_\psi \dot{X}_I - \rho \partial_{X_{II}} \bar{f}_\psi \dot{X}_{II} - \rho \partial_{X_{III}} \bar{f}_\psi \dot{X}_{III} + \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} = 0$$

pour toute évolution, c'est-à-dire $\forall \dot{\mathbf{X}}$ et $\forall \mathbf{D}$. ($\dot{\mathbf{X}}$ et \mathbf{D} non indépendants)

Pour exprimer les $\dot{X}_I, \dot{X}_{II}, \dot{X}_{III}$, il faut maintenant choisir un tenseur de déformation.

Comportement mécanique

On choisit d'utiliser le tenseur de déformation objectif \mathbf{B} :

Variables d'état scalaires : $\{T, B_I, B_{II}, B_{III}\}$

Cinématique : $\dot{B}_I = 2\mathbf{B} : \mathbf{D}$ $\dot{B}_{II} = 2(B_I \mathbf{B} - \mathbf{B}^2) : \mathbf{D}$ $\dot{B}_{III} = 2B_{III} \mathbf{G} : \mathbf{D}$

Énergie libre de Helmholtz : $\Psi^m = f_\Psi^B(T, B_I, B_{II}, B_{III})$

Conservation de la masse : $\rho = \rho_0 K_v^{-1} = \rho_0 B_{III}^{-1/2}$

Dissipation intrinsèque : $\Phi_{int} = -\rho \partial_{X_I} \bar{f}_\Psi X_I - \rho \partial_{X_{II}} \bar{f}_\Psi X_{II} - \rho \partial_{X_{III}} \bar{f}_\Psi X_{III} + \sigma : \mathbf{D} = 0$

$$\Phi_{int} = \underbrace{-2\rho \left(\partial_{B_I} f_\Psi^B \mathbf{B} + \partial_{B_{II}} f_\Psi^B (B_I \mathbf{B} - \mathbf{B}^2) + \partial_{B_{III}} f_\Psi^B B_{III} \mathbf{G} - \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2\rho} \right)}_{\mathbf{T} : \text{fonction d'état du second ordre symétrique}} : \mathbf{D}$$

\mathbf{T} : fonction d'état du second ordre symétrique

Élasticité : $\forall \mathbf{D}, \Phi_{int} = \mathbf{T} : \mathbf{D} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{T} = \mathbf{0}$

Comportement mécanique élastique isotrope

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{2\rho_0}{\sqrt{B_{III}}} \left(B_{III} \partial_{B_{III}} f_\Psi^B \mathbf{G} + (\partial_{B_I} f_\Psi^B + B_I \partial_{B_{II}} f_\Psi^B) \mathbf{B} - \partial_{B_{II}} f_\Psi^B \mathbf{B}^2 \right)$$

$\boldsymbol{\sigma}$ est complètement déterminé par la fonction d'état f_Ψ^B .

(la réponse sthénique $\boldsymbol{\sigma}$ à un état dépend de la température car les $\partial_{\bullet} f_\Psi^B$ sont fonctions de T)



Avec d'autres tenseurs de déformation...

Deux méthodes équivalentes :

- 1 refaire la démarche précédente ; (écrire Φ_{int} avec un autre tenseur de déformation)
- 2 changer de tenseur algébriquement. (relations entre tenseurs de déformation)

Quelques exemples : (autres exemples dans le pdf)

- avec des tenseurs de déformation objectifs : ($\mathbf{V} = \sqrt{\mathbf{B}}, \mathbf{M} = \ln \mathbf{V}, \boldsymbol{\varepsilon}^V = \mathbf{V} - \mathbf{G}, \dots$)

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\rho_0}{V_{III}} \left(V_{III} \partial_{V_{III}} f_{\psi}^V \mathbf{G} + (\partial_{V_I} f_{\psi}^V + V_I \partial_{V_{II}} f_{\psi}^V) \mathbf{V} - \partial_{V_{II}} f_{\psi}^V \mathbf{V}^2 \right)$$

$$\text{forme générale : } \boldsymbol{\sigma} = K_0^X \mathbf{G} + K_1^X \mathbf{X} + K_2^X \mathbf{X}^2$$

- avec des tenseurs de déformation non objectifs :

(rappel : $\mathbf{C} = \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{R}$, $\mathbf{U} = \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{R}$, etc. où le champ $\mathbf{R}(P,t)$ est orthogonal non objectif)

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{2\rho_0}{\sqrt{C_{III}}} \mathbf{R} \cdot \left(C_{III} \partial_{C_{III}} f_{\psi}^C \mathbf{G} + (\partial_{C_I} f_{\psi}^C + C_I \partial_{C_{II}} f_{\psi}^C) \mathbf{C} - \partial_{C_{II}} f_{\psi}^C \mathbf{C}^2 \right) \cdot \mathbf{R}^T$$

$$\text{forme générale : } \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{R} \cdot \left(K_0^X \mathbf{G} + K_1^X \mathbf{X} + K_2^X \mathbf{X}^2 \right) \cdot \mathbf{R}^T$$

Avec le tenseur de déformation $\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{C} - \mathbf{G})$ (exemple historique, voir pdf)

$$\mathbf{S} = \rho_0 \left((\partial_{E_I} f_{\psi}^E + E_I \partial_{E_{II}} f_{\psi}^E + E_{II} \partial_{E_{III}} f_{\psi}^E) \mathbf{G} - (\partial_{E_{II}} f_{\psi}^E + E_I \partial_{E_{III}} f_{\psi}^E) \mathbf{E} + \partial_{E_{III}} f_{\psi}^E \mathbf{E}^2 \right)$$

$$\text{où } \mathbf{S} = \det \mathbf{F} \mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-T} = K_V \mathbf{U}^{-1} \cdot (\mathbf{R}^T \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{R}) \cdot \mathbf{U}^{-1}$$

\mathbf{S} est dénommé second « tenseur des contraintes » de Piola-Kirchhoff.

Comportement incrémental (page facultative)

Motivation : Résolution numérique des « problèmes non linéaires » par incréments de temps (fictif ou réel). (quasi-statique ou temporel)

Comportement mécanique : $\boldsymbol{\sigma} = K_0^X \mathbf{G} + K_1^X \mathbf{X} + K_2^X \mathbf{X}^2$ (\mathbf{X} objectif)

Comportement mécanique incrémental :

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \dot{K}_0^X \mathbf{G} + \dot{K}_1^X \mathbf{X} + K_1^X \dot{\mathbf{X}} + \dot{K}_2^X \mathbf{X}^2 + K_2^X (\dot{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{X} \cdot \dot{\mathbf{X}})$$

$$\dot{K}_\bullet^X = \partial_T K_\bullet^X \dot{T} + \partial_{X_I} K_\bullet^X \dot{X}_I + \partial_{X_{II}} K_\bullet^X \dot{X}_{II} + \partial_{X_{III}} K_\bullet^X \dot{X}_{III}$$

$$= \partial_T K_\bullet^X \dot{T} + \partial_{X_I} K_\bullet^X \mathbf{G} : \dot{\mathbf{X}} + \partial_{X_{II}} K_\bullet^X (X_I \mathbf{G} - \mathbf{X}) : \dot{\mathbf{X}} + \partial_{X_{III}} K_\bullet^X (X_{II} \mathbf{G} - X_I \mathbf{X} + \mathbf{X}^2) : \dot{\mathbf{X}}$$

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = (\partial_T K_0 \mathbf{G} + \partial_T K_1 \mathbf{X} + \partial_T K_2 \mathbf{X}^2) \dot{T} + \mathbf{K}(\mathbf{X}) : \dot{\mathbf{X}} \quad (\mathbf{K}(\mathbf{X}) \text{ d'ordre 4 objectif, voir pdf})$$

Le comportement incrémental est une relation affine entre les valeurs actuelles $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ et $\dot{\mathbf{X}}$, différente de la loi de comportement.

Mises en garde :

- 1 Une loi incrémentale arbitraire ne garantit pas la nullité de la dissipation intrinsèque. (« hypoélasticité », souvent thermodynamiquement absurde)
- 2 On trouve dans la littérature (et aussi cachées dans certains logiciels!) des lois incrémentales erronées. (« dérivées objectives », $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ et $\dot{\mathbf{X}}$ ne sont jamais objectifs)



Variables d'état

Comportement thermique

Relation de Helmholtz

Comportement mécanique

Comportement incrémental

Limite élastique

Synthèse

Exemple de modèle

Limite élastique (motivations)

Considérations microscopiques : deux phénomènes inélastiques

- ① Réarrangements de liaisons dus à des variations d'angle excessives ;
(dislocations entre ou dans les « grains », réarrangements des « ponts » dans les polymères)
- ② Ruptures de liaisons dues à des dilatations linéiques excessives.

Considérations macroscopiques : (cinématique d'un milieu continu)

- Une déformation sphérique n'engendre pas de variations d'angle.
- Les variations d'angle (distorsion angulaire ou stérique) ne sont dues qu'à la partie isovolume de la déformation.

Objectifs des critères de limite élastique :

- ① Se protéger des réarrangements de liaison ;
- ② Se protéger des ruptures de liaison.

Vocabulaire phénoménologique : (constatations empiriques macroscopiques)

- **Plastification :** soupçon de réarrangements de liaisons.
- **Endommagement :** soupçon de ruptures de liaisons.
- **Fatigue :** soupçon d'accumulation de ruptures de liaisons.
- **Vieillessement :** soupçon d'une transformation chimique lente.

Quelques critères de limite élastique

Protection contre les réarrangements de liaisons :

- Limitation de la distorsion stérique maximale :

$$\delta_{max}^s = \frac{\sqrt{3}}{9} \frac{(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)^{3/2}}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} \leq \delta_{lim}^s \quad (\lambda_\bullet : \text{dilatations linéiques principales})$$

$$\text{Rappels de cinématique : } \delta_{max}^s = \frac{\sqrt{3}}{9} \frac{B_I^{3/2}}{\sqrt{B_{III}}} = \frac{\sqrt{3}}{9} \frac{(V_I^2 - 2V_{II})^{3/2}}{V_{III}} = \dots$$

- Limitation de la distorsion angulaire maximale :

$$\delta_{max}^a = \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_3} + \frac{\lambda_3}{\lambda_1} \right) \leq \delta_{lim}^a$$

$$\text{Avec le tenseur de déformation } \mathbf{M} = \text{Ln} \mathbf{V}, \quad \delta_{max}^a = \frac{1}{2} (e^{m_1 - m_3} + e^{m_3 - m_1}) = \cosh(m_1 - m_3)$$

le critère peut s'écrire : $m_1 - m_3 \leq m_{lim} = \text{Arccosh} \delta_{lim}^a$ (critère de Tresca appliqué à \mathbf{M})

Protection contre les ruptures de liaisons :

Limitation de la dilatation linéique maximale : $\lambda_1 \leq \lambda_{lim}$

$$\text{Rappels : } \lambda_1 = \frac{V_I}{3} + \frac{2J}{3} \cos \frac{\varphi}{3} \quad \text{où } J = \sqrt{V_I^2 - 3V_{II}} = \sqrt{3/2} \|\text{dev} \mathbf{V}\|$$

$$\text{et } \varphi = \text{Arccos} \frac{27V_{III} - 9V_I V_{II} + 2V_I^3}{2J^3} = \text{Arccos}(3\sqrt{6} \det \frac{\text{dev} \mathbf{V}}{\|\text{dev} \mathbf{V}\|}) \in [0; \pi]$$

$$\text{Majoration : } 0.866 \approx \frac{\sqrt{3}}{2} \leq \cos \frac{\varphi}{3} \leq 1 \Rightarrow \frac{V_I}{3} + \frac{\sqrt{3}J}{3} \leq \lambda_1 \leq \frac{V_I}{3} + \frac{2J}{3} \quad \text{critère : } \frac{V_I}{3} + \frac{2J}{3} \leq \lambda_{lim}$$

Critères énergétiques : $\Psi_{isov}^m \leq \Psi_{lim}^m$ ou $e_{isov}^m \leq e_{lim}^m$

(en isotherme, Ψ_{isov}^m et e_{isov}^m sont confondus et appelés « énergie de déformation isovolume »)

Pour utiliser ces critères, il faut connaître les fonctions d'état f_Ψ ou f_e .

Critères réglementaires... (une protection plus juridique que scientifique!)

Comportement mécanique en élasticité isotrope :

- Variables d'état : $\{T, \mathbf{X}\}$ ou $\{T, X_I, X_{II}, X_{III}\}$ ou $\{T, I_1, \dots, I_p\}$ ($p \leq 3$)
- Loi de comportement mécanique :
 - si \mathbf{X} est objectif : $\boldsymbol{\sigma} = K_0^X \mathbf{G} + K_1^X \mathbf{X} + K_2^X \mathbf{X}^2$
 - avec \mathbf{X} non objectif : $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{R} \cdot (K_0^X \mathbf{G} + K_1^X \mathbf{X} + K_2^X \mathbf{X}^2) \cdot \mathbf{R}^T$
 où les K_i^X sont des fonctions d'état (fonctions I_\bullet et de $\partial_{I_\bullet} \bar{f}_\psi$)

La fonction d'état \bar{f}_ψ détermine le comportement mécanique.
(on peut la choisir arbitrairement, mais gare aux modèles à comportement exotique!)

Quelques énergies libres historiques : (encore présentes dans les logiciels)

Piola-Kirchhoff : $f_\psi^E = \frac{1}{2\rho_0} (\lambda E_I^2 + 2\mu(E_I^2 - 2E_{II}))$ $\mathbf{S} = \lambda E_I \mathbf{G} + 2\mu \mathbf{E}$

Néo-Hooke : $f_\psi^C = a(C_I - 3)$ $\boldsymbol{\sigma} = \frac{2a\rho_0}{\sqrt{C_{III}}} \mathbf{R} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{R}^T$

Ogden : $f_\psi = \frac{1}{\rho_0} \sum_{k=1}^n \frac{\mu_k}{\alpha_k} (\lambda_1^{\alpha_k} + \lambda_2^{\alpha_k} + \lambda_3^{\alpha_k})$ $\boldsymbol{\sigma} = \dots$

...

(autres exemples dans le pdf)

Toutes ces propositions de \bar{f}_ψ sont conceptuellement ou expérimentalement peu justifiées !

Critères de limite élastique :

Critères **macroscopiques** pour se protéger des réarrangements et des ruptures de liaisons interatomiques.

Construction d'un modèle isotrope (1/4)

Motivation :

Construction d'une énergie libre de Helmholtz physiquement justifiée.

Choix des variables d'état :

- La température T , (imposée par le second principe de la thermodynamique)
- On utilise le tenseur de déformation objectif \mathbf{B} .

Décomposition (unique et commutative) :
$$\mathbf{B} = \underbrace{(K_v^{2/3} \mathbf{G})}_{\text{déf. sph.}} \cdot \underbrace{(K_v^{-2/3} \mathbf{B})}_{\text{déf. isov.}}$$

- on caractérise la déformation sphérique par la dilatation volumique : $K_v = B_{III}^{1/2}$
- on caractérise la déformation isovolume *seulement* par la distorsion stérique maximale : $\delta_{max}^s = \frac{\sqrt{3}}{9} \frac{B_I^{3/2}}{B_{III}^{1/2}}$, noté $\delta \geq 1$

Les trois variables d'état de ce modèle sont : $\{T, K_v, \delta\}$

L'énergie libre massique de Helmholtz est : $\psi^m = f_\psi(T, K_v, \delta)$

Remarque : Dans ce modèle, l'influence de l'invariant B_{II} est ignorée.

Les déformations isovolumes de même δ_{max}^s ont la même contribution dans f_ψ .



Construction d'un modèle isotrope (2/4)

Changement de variables d'état : $\{B_I, B_{II}, B_{III}\} \leftrightarrow \{K_V, \delta\}$

On en déduit : $\boldsymbol{\sigma} = \rho_0 (\partial_{K_V} f_\psi - \delta K_V^{-1} \partial_\delta f_\psi) \mathbf{G} + \rho_0 K_V^{-5/3} \partial_\delta f_\psi \mathbf{B}$

Un chemin dans l'espace des états : (pour atteindre un état quelconque)

$$\underbrace{E_0 = (T_0, 1, 1)}_{\text{état de référence}} \xrightarrow{\mathcal{C}^{(1)}} E_1 = (T, 1, 1) \xrightarrow{\mathcal{C}^{(2)}} E_2 = (T, K_V, 1) \xrightarrow{\mathcal{C}^{(3)}} \underbrace{E_t = (T, K_V, \delta)}_{\text{état actuel}}$$

chemin $\mathcal{C}^{(1)}$: $\psi_1^m - 0 = g^{(1)}(T)$ $g^{(1)}(T_0) = 0$

chemin $\mathcal{C}^{(2)}$: $\psi_2^m - \psi_1^m = g^{(2)}(T, K_V)$ $g^{(2)}(T, 1) = 0, \forall T$

chemin $\mathcal{C}^{(3)}$: $\psi^m - \psi_2^m = g^{(3)}(T, K_V, \delta)$ $g^{(3)}(T, K_V, 1) = 0, \forall T \forall K_V$

$$f_\psi(T, K_V, \delta) = g^{(1)}(T) + g^{(2)}(T, K_V) + g^{(3)}(T, K_V, \delta)$$

$$f_s = -\partial_T f_\psi \quad f_e = f_\psi + T f_s \quad \boldsymbol{\sigma} = \dots \quad (\text{tous fonction de } g^{(1)}, g^{(2)} \text{ et } g^{(3)})$$

Mesures à effectuer : (expériences idéales, à approcher expérimentalement)

$$Q_{exp}^{(1)}(T) = f_e(T, 1, 1) \quad (\text{chaleur massique en } \text{J} \cdot \text{kg}^{-1}, \text{ à déformation bloquée, } \mathbf{B} = \mathbf{G})$$

$$\sigma_{exp}^{(2)}(T, K_V) = \frac{\text{tr} \boldsymbol{\sigma}^{(2)}(T, K_V, 1)}{3} \quad (\text{contrainte moyenne dans une déf. sphérique à } T \text{ constant})$$

$$\tau_{exp}^{(3)}(T, K_V, \delta) = \boldsymbol{\sigma}^{(3)} 1_2 \quad (\text{contrainte tangentielle dans un glissement à } T \text{ et } K_V \text{ constants})$$

Ce sont trois équations différentielles à trois fonctions inconnues $g^{(1)}, g^{(2)}$ et $g^{(3)}$.

Construction d'un modèle isotrope (3/4)

Solution : (détail de la résolution dans le pdf)

$$g^{(1)} = -T \int_{T_0}^T \frac{Q_{exp}^{(1)}(T)}{T^2} dT \quad g^{(2)} = \frac{1}{\rho_0} \int_1^{K_V} \sigma_{exp}^{(2)}(T, K_V) dK_V \quad g^{(3)} = \frac{K_V}{\rho_0 \sqrt{3}} \int_1^\delta \frac{\tau_{exp}^{(3)}(T, K_V, \delta)}{\delta^{1/3} \sqrt{\delta^{2/3} - 1}} d\delta$$

$$f_\psi = g^{(1)} + g^{(2)} + g^{(3)} \quad f_s = -\partial_T f_\psi \quad f_e = f_\psi + T f_s$$

Comportement mécanique : $\boldsymbol{\sigma} = K_0 \mathbf{G} + K_1 \mathbf{B}$ avec :

$$K_0 = \sigma_{exp}^{(2)} + \int_1^\delta \frac{\tau_{exp}^{(3)} + K_V \partial_T \tau_{exp}^{(3)}}{\sqrt{3} \delta^{1/3} \sqrt{\delta^{2/3} - 1}} d\delta - \frac{\delta^{2/3} \tau_{exp}^{(3)}}{\sqrt{3} \sqrt{\delta^{2/3} - 1}} \quad \text{et} \quad K_1 = \frac{\tau_{exp}^{(3)}}{\sqrt{3} K_V^{2/3} \sqrt{\delta^{2/3} - 1}}$$

Simplification facultative : la déformation isovolume ne change pas la contrainte moyenne.

$$\partial_\delta \text{tr} \boldsymbol{\sigma} = 0 \Rightarrow \tau_{exp}^{(3)}(T, K_V, \delta) = \frac{\tau_{exp1}^{(3)}(T, \delta)}{K_V}$$

Idéalisations possibles : (pour limiter le nombre d'expériences)

chemin $\mathcal{C}^{(3)}$:	$\tau_{exp}^{(3)} = \frac{2\mu(T)\gamma}{K_V} = \frac{2\mu(T)\sqrt{3}\sqrt{\delta^{2/3}-1}}{K_V}$	$\mu(T) = \mu_0 e^{b(1-\frac{T}{T_0})}$
chemin $\mathcal{C}^{(2)}$:	$\sigma_{exp}^{(2)} = \sigma_{exp}^{(1)}(T) + \xi(T) \ln K_V$	$\xi(T) = \xi_0 e^{a(1-\frac{T}{T_0})}$
chemin $\mathcal{C}^{(1)}$:	dilatation libre ($\mathcal{C}^{(5)}$) + déf. sphérique isotherme	(pour ramener K_V à 1)
	$K_{Vexp}^{(5)} = 1 + \beta(T - T_0)$	$Q_{exp}^{(5)} = C_{\boldsymbol{\sigma}=\mathbf{0}}(T - T_0)$

Les exemples d'idéalisation de courbes expérimentales proposés ici sont vraisemblables mais arbitraires.

(toute idéalisation d'expérience, même fantaisiste, conduit à une élasticité isotrope!)

Construction d'un modèle isotrope (4/4)

En résumé :

- **Choix de variables d'état :** (élasticité isotrope)
 - la température T , (imposé par le second principe de la thermodynamique)
 - la déformation \mathbf{B} : deux invariants cinématiquement significatifs.

Motivation : décomposition (unique et commutative) de la déformation :

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}^{sph} \cdot \mathbf{B}^{isov}$$

$$\mathbf{B}^{sph} = K_v^{2/3} \mathbf{G}, \quad \text{choix : la dilatation volumique } K_v;$$

$$\mathbf{B}^{isov} = K_v^{-2/3} \mathbf{B}, \quad \text{choix : la distorsion stérique maximale } \delta_{max}^s (= \delta).$$

Pour \mathbf{B}^{isov} , on ne retient que le seul invariant $\delta_{max}^s = \frac{\sqrt{3}}{9} \frac{B_I^{3/2}}{B_{III}^{1/2}} \geq 1$.

(on ne distingue pas les déformations isovolumes de même distorsion stérique maximale)

- **Construction raisonnée d'une énergie libre de Helmholtz :**
 - les trois mesures $Q_{exp}^{(1)}(T)$, $\sigma_{exp}^{(2)}(T, K_v)$ et $\tau_{exp}^{(3)}(T, K_v, \delta)$ déterminent complètement l'énergie libre massique de Helmholtz f_ψ ;
 - on en déduit f_s , f_e et $\mathbf{f}\sigma$.
- **Possibilité d'idéaliser les mesures** (pour économiser des expériences) avec des fonctions $Q_{exp}^{(1)}$, $\sigma_{exp}^{(2)}$ et $\tau_{exp}^{(3)}$ physiquement raisonnables.



Petites
perturbations

Loi de Hooke
historique

Une loi
linéaire en ε^V

Petites
déformations

Conclusion

Troisième partie

Pseudo-élasticité de Hooke

Petites « perturbations » (rappels de cinématique)

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{grad}_L \mathbf{u} + \mathbf{grad}_L^\top \mathbf{u} + \mathbf{grad}_L^\top \mathbf{u} \cdot \mathbf{grad}_L \mathbf{u}) \quad (\text{Green-Lagrange droit, non objectif})$$

Hypothèse simplificatrice : $\|\mathbf{grad}_L \mathbf{u}\| \ll 1$ (le mouvement est une quasi-translation)

$$\Rightarrow \mathbf{E} \simeq \mathbf{sym grad}_L \mathbf{u} = \boldsymbol{\varepsilon} \quad (\text{tenseur des petites « perturbations »})$$

Conséquences de l'hypothèse simplificatrice :

- 1 si le mouvement est proche d'une rotation de solide (petites déf.), le tenseur $\boldsymbol{\varepsilon}$ est une mauvaise mesure des petites déformations.
- 2 si l'hypothèse $\|\mathbf{grad}_L \mathbf{u}\| \ll 1$ est vraie pour un observateur, elle est généralement fautive pour un autre ($\|\mathbf{grad}_L \tilde{\mathbf{u}}\| \not\ll 1$).

Petites « perturbations »

Pour l'observateur utilisé pour décrire le mouvement, le mouvement du milieu continu est une quasi-translation.

Loi de Hooke historique

Rappels : (voir tout ouvrage classique d'élasticité en « petites perturbations »)

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma} &= 2\mu\boldsymbol{\varepsilon} + \lambda \operatorname{tr}\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{G} - (3\lambda + 2\mu)\alpha(T - T_0)\mathbf{G} \quad (\lambda, \mu : \text{coefficients de Lamé}) \\ &= \frac{E}{1+\nu} \left(\boldsymbol{\varepsilon} + \frac{\nu \operatorname{tr}\boldsymbol{\varepsilon}}{1-2\nu} \mathbf{G} \right) - \frac{E\alpha(T - T_0)}{1-2\nu} \mathbf{G} \quad (E : \text{module d'Young}, \nu : \text{coef. de Poisson})\end{aligned}$$

La loi de Hooke est une bijection $\boldsymbol{\sigma} \leftrightarrow \boldsymbol{\varepsilon}$ (on sait écrire $\boldsymbol{\varepsilon} = f(T, \boldsymbol{\sigma})$, voir le pdf)

Critiques :

- La loi n'est utilisable que sous les hypothèses de validité de $\boldsymbol{\varepsilon}$.
(mouvement de quasi-translation pour l'observateur utilisé)
- La loi est une relation entre $\boldsymbol{\sigma}$ objectif et $\boldsymbol{\varepsilon}$ non objectif !
- Il n'existe pas d'énergie libre de Helmholtz conduisant à cette loi de comportement sauf si : (démonstrations dans le pdf)
 - 1 $\mathbf{R}^T \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{R} \simeq \boldsymbol{\sigma}$ (« très petites » rotations : $\mathbf{F} \sim$ symétrique défini positif)
 - 2 $\rho \simeq \rho_0$ (quasi-incompressibilité ou violation de la conservation de masse)

Hors de ces conditions extrêmement restrictives,
la « loi » de Hooke n'est pas thermodynamiquement admissible.

Une loi de comportement affine en $\boldsymbol{\varepsilon}^V$

Choix : on utilise $\boldsymbol{\varepsilon}^V = \mathbf{V} - \mathbf{G}$ ($\boldsymbol{\varepsilon}^V$ objectif et sans restrictions cinématiques)

Question : Existe-t-il $f_\psi(T, \boldsymbol{\varepsilon}_I^V, \boldsymbol{\varepsilon}_{II}^V, \boldsymbol{\varepsilon}_{III}^V)$ tel que

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu\boldsymbol{\varepsilon}^V + \lambda\boldsymbol{\varepsilon}_I^V\mathbf{G} - (3\lambda + 2\mu)\alpha(T - T_0)\mathbf{G} \quad (\text{loi de Hooke, mais avec } \boldsymbol{\varepsilon}^V)$$

Réponse : (démonstration dans le pdf)

$$f_\psi = \frac{\lambda}{2\rho_0}\boldsymbol{\varepsilon}_I^V(\boldsymbol{\varepsilon}_I^V + 2(\boldsymbol{\varepsilon}_{II}^V + \boldsymbol{\varepsilon}_{III}^V)) + \frac{\mu}{\rho_0}(\boldsymbol{\varepsilon}_I^V{}^2 + 2(\boldsymbol{\varepsilon}_{II}^V + \boldsymbol{\varepsilon}_{III}^V)) - \frac{\alpha(3\lambda + 2\mu)(\boldsymbol{\varepsilon}_I^V + \boldsymbol{\varepsilon}_{II}^V + \boldsymbol{\varepsilon}_{III}^V)}{\rho_0} + f(T)$$

Cette loi de comportement mécanique est affine en $\boldsymbol{\varepsilon}^V$ et sans restriction sur les déformations ni sur le mouvement.

En petites déformations : ($\|\boldsymbol{\varepsilon}^V\| \ll 1$)

- Les formules classiques avec $\boldsymbol{\varepsilon}$ sont encore valables. (remplacer $\boldsymbol{\varepsilon}$ par $\boldsymbol{\varepsilon}^V$)
Les directions matérielles sont identifiées par leur direction actuelle \mathbf{u}_t
Exemples : $K_I(\mathbf{u}) - 1 = \mathbf{u}_t \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^V \cdot \mathbf{u}_t$ $K_V - 1 = \text{tr}\boldsymbol{\varepsilon}^V$
- **Dans un essai de traction**, E et ν ont les mêmes interprétations.

Critiques :

- Les variables d'état sont $\{T, \boldsymbol{\varepsilon}_I^V, \boldsymbol{\varepsilon}_{II}^V, \boldsymbol{\varepsilon}_{III}^V\}$; ($\boldsymbol{\varepsilon}_{II}^V$ et $\boldsymbol{\varepsilon}_{III}^V$ cinématiquement obscurs)
- La motivation de ce modèle n'est que de ressembler à la loi de Hooke !



Petites déformations sans restriction sur le mouvement

Rappel du modèle $\{T, K_v, \delta\}$ (simplifié) : $\boldsymbol{\sigma} = K_0 \mathbf{G} + K_1 \mathbf{B}$

$$\text{avec : } K_0 = \sigma_{exp}^{(2)}(T, K_v) - \frac{\delta^{2/3} \tau_{exp1}^{(3)}(T, \delta)}{\sqrt{3} K_v \sqrt{\delta^{2/3} - 1}} \quad K_1 = \frac{\tau_{exp1}^{(3)}(T, \delta)}{\sqrt{3} K_v^{5/3} \sqrt{\delta^{2/3} - 1}}$$

Idéalisation des expériences près du mouvement rigide :

(c'est-à-dire au voisinage de $K_v = 1$ et de $\gamma = 0 \Leftrightarrow \delta = 1$)

$$\sigma_{exp}^{(2)}(T, K_v) \simeq \sigma_{exp}^{(1)}(T) + \xi_0(T) (K_v - 1) \quad \tau_{exp1}^{(3)}(T, \delta) \simeq \mu_0(T) \gamma = \mu_0(T) \sqrt{3} \sqrt{\delta^{2/3} - 1}$$

$$\text{et on pose : } \mathbf{B} = \mathbf{V}^2 = (\boldsymbol{\varepsilon}^V + \mathbf{G})^2 \quad (K_v = f(\boldsymbol{\varepsilon}^V) \text{ et } \delta = g(\boldsymbol{\varepsilon}^V))$$

Petite déformation : $\|\boldsymbol{\varepsilon}^V\| \ll 1$. Après linéarisation il vient :

(on néglige les infiniments petits du second ordre devant 1, détail des calculs dans le pdf)

$$\boldsymbol{\sigma} \simeq \underbrace{\left(\xi_0(T) - \frac{2\mu_0(T)}{3} \left(1 - \frac{5}{3} \varepsilon_1^V\right) \right)}_{\bar{K}_0} \varepsilon_1^V \mathbf{G} + 2\mu_0(T) \underbrace{\left(1 - \frac{5}{3} \varepsilon_1^V\right)}_{\bar{K}_1} \boldsymbol{\varepsilon}^V$$

La linéarisation des expériences près d'un mouvement rigide n'implique pas la linéarité de la loi en $\boldsymbol{\varepsilon}^V$.

(«comportement linéaire» n'a pas de sens physique : cela dépend du tenseur de déformation choisi)

Conclusion

- L'utilisation de $\boldsymbol{\varepsilon} = \text{symgrad}_L \mathbf{u}$ est soumise à des restrictions :
 - ① sur les déformations (petites déformations)
 - ② sur les mouvements envisageables (quasi-translation)

Ces restrictions sont rarement acceptables.

- La loi de Hooke n'est pas thermodynamiquement admissible.
(il faudrait de « très petites » rotations ($\bar{\boldsymbol{\sigma}} \simeq \boldsymbol{\sigma}$) et une quasi-incompressibilité ($\rho \simeq \rho_0$))
- On peut construire une loi de comportement mécanique en $\boldsymbol{\varepsilon}^V$ semblable à la loi de Hooke sans aucune restriction sur les déformations ni sur le mouvement.
(mais l'expression de l'énergie libre n'est pas physiquement motivée)
- Une linéarisation des expériences au voisinage d'un mouvement rigide (petites déformations) ne conduit généralement pas à une loi de comportement linéaire en $\boldsymbol{\varepsilon}^V$.
- La locution « élasticité linéaire » n'a pas de sens physique.
(il suffit de changer de tenseur de déformation pour que la loi ne soit plus « linéaire » !)



Variables
d'état

Relation de
Helmholtz

Comportement
mécanique

Déviations des
directions
d'anisotropie

Comportement
thermique

Limite
élastique

Exemple de
modèle

Quatrième partie

Élasticité isotrope transverse

Variables d'état

Élasticité isotrope transverse

Milieu continu élastique avec une seule direction d'anisotropie.

Variables d'état tensorielles : (objectives)

- 1 la température actuelle ;
- 2 un tenseur de déformation actuelle, (on choisit \mathbf{B}) ;
- 3 une direction d'anisotropie actuelle \mathbf{n}_t (ou $\mathbf{N}_t = \mathbf{n}_t \otimes \mathbf{n}_t$).

Variables d'état scalaires : $\{T, B_I, B_{II}, B_{III}, \underbrace{\mathbf{B} : \mathbf{N}_t}_{I_1^B}, \underbrace{\mathbf{B}^2 : \mathbf{N}_t}_{I_2^B}\}$ I_1^B et I_2^B reflètent l'orientation relative de \mathbf{N}_t par rapport à \mathbf{B} .

Dérivées particulières : (scalaires objectifs, détail du calcul dans le pdf)

$$\dot{I}_1^B = (4 \operatorname{sym}(\mathbf{N}_t \cdot \mathbf{B}) - 2 I_1^B \mathbf{N}_t) : \mathbf{D}$$

$$\dot{I}_2^B = (4 \operatorname{sym}(\mathbf{N}_t \cdot \mathbf{B}^2) - 2 I_2^B \mathbf{N}_t + 2 \mathbf{B} \cdot \mathbf{N}_t \cdot \mathbf{B}) : \mathbf{D}$$



Relation de Helmholtz

Énergie libre de Helmholtz :

$$\psi^m = f_\psi^B(T, B_I, B_{II}, B_{III}, I_1^B, I_2^B) \quad (6 \text{ variables d'état scalaires indépendantes})$$

$$\dot{\psi}^m = \partial_T f_\psi^B \dot{T} + \partial_{B_I} f_\psi^B \dot{B}_I + \partial_{B_{II}} f_\psi^B \dot{B}_{II} + \partial_{B_{III}} f_\psi^B \dot{B}_{III} + \partial_{I_1^B} f_\psi^B \dot{I}_1^B + \partial_{I_2^B} f_\psi^B \dot{I}_2^B$$

Dissipation intrinsèque :

$$\Phi_{int} = -\rho (\dot{\psi}^m + s^m \dot{T}) + \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D}$$

$$= -\rho (\partial_T f_\psi^B + f_s^B) \dot{T} - \underbrace{\rho (\partial_{B_I} f_\psi^B \dot{B}_I + \partial_{B_{II}} f_\psi^B \dot{B}_{II} + \partial_{B_{III}} f_\psi^B \dot{B}_{III} + \partial_{I_1^B} f_\psi^B \dot{I}_1^B + \partial_{I_2^B} f_\psi^B \dot{I}_2^B)}_{g(T, \mathbf{B}, \mathbf{N}_t, \mathbf{D}) \quad (\text{non fonction de } \dot{T})} + \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D}$$

Relation de Helmholtz :

$$\forall \dot{T}, \quad \Phi_{int} = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial_T f_\psi^B + f_s^B = 0$$

En élasticité (isotrope ou non) la relation de Helmholtz est vraie.
Une fonction d'état (f_ψ par exemple) suffit à déterminer le modèle.

Loi de comportement mécanique

La dissipation intrinsèque se réduit à :

$$\Phi_{int} = -\rho \left(\partial_{B_I} f_{\psi}^B \dot{B}_I + \partial_{B_{II}} f_{\psi}^B \dot{B}_{II} + \partial_{B_{III}} f_{\psi}^B \dot{B}_{III} + \partial_{I_1^B} f_{\psi}^B \dot{I}_1^B + \partial_{I_2^B} f_{\psi}^B \dot{I}_2^B \right) + \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D}$$

En détaillant les dérivées particulières, il vient :

$$\begin{aligned} \Phi_{int} = & -2\rho \left(\partial_{B_I} f_{\psi}^B \mathbf{B} + \partial_{B_{II}} f_{\psi}^B (B_I \mathbf{B} - \mathbf{B}^2) + \partial_{B_{III}} f_{\psi}^B B_{III} \mathbf{G} \right) : \mathbf{D} \\ & - 2\rho \left(\partial_{I_1^B} f_{\psi}^B (2 \text{sym}(\mathbf{N}_t \cdot \mathbf{B}) - I_1^B \mathbf{N}_t) + \partial_{I_2^B} f_{\psi}^B (2 \text{sym}(\mathbf{N}_t \cdot \mathbf{B}^2) - I_2^B \mathbf{N}_t + \mathbf{B} \cdot \mathbf{N}_t \cdot \mathbf{B}) \right) : \mathbf{D} + \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} \end{aligned}$$

Élasticité : $\Rightarrow \forall \mathbf{D}, \Phi_{int} = \mathbf{T} : \mathbf{D} = 0 \Rightarrow \mathbf{T} = \mathbf{0}$

Conservation de la masse : $\rho = \frac{\rho_0}{\sqrt{B_{III}}}$

Comportement mécanique isotrope transverse

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} = & \frac{2\rho_0}{\sqrt{B_{III}}} \left(B_{III} \partial_{B_{III}} f_{\psi}^B \mathbf{G} + (\partial_{B_I} f_{\psi}^B + B_I \partial_{B_{II}} f_{\psi}^B) \mathbf{B} - \partial_{B_{II}} f_{\psi}^B \mathbf{B}^2 \right) \quad (\text{similaire à la loi isotrope}) \\ & + \frac{2\rho_0}{\sqrt{B_{III}}} \left(\partial_{I_1^B} f_{\psi}^B (2 \text{sym}(\mathbf{N}_t \cdot \mathbf{B}) - I_1^B \mathbf{N}_t) + \partial_{I_2^B} f_{\psi}^B (2 \text{sym}(\mathbf{N}_t \cdot \mathbf{B}^2) - I_2^B \mathbf{N}_t + \mathbf{B} \cdot \mathbf{N}_t \cdot \mathbf{B}) \right) \end{aligned}$$

Il reste à préciser la fonction d'état $f_{\psi}^B(T, B_I, B_{II}, B_{III}, I_1^B, I_2^B)$.

(on peut écrire ce comportement mécanique avec d'autres tenseurs de déformation, voir pdf)



Variables d'état

Relation de Helmholtz

Comportement mécanique

Déviation des directions d'anisotropie

Comportement thermique

Limite élastique

Exemple de modèle

Déviations des directions d'anisotropie

Les directions d'anisotropie sont des directions matérielles.
Dans un mouvement (déformant ou non), elles sont déviées.

Rappel de cinématique : soit \mathbf{n} une direction matérielle

Dans tout mouvement : $\mathbf{n}_t = \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_0}{\|\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_0\|} \Leftrightarrow \mathbf{n}_0 = \frac{\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{n}_t}{\|\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{n}_t\|}$

Mouvement particulier : glissement dans le plan $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$.
(mouvement isovolume très utilisé en expérimentation)

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{x}_0 + \gamma x_{02} \mathbf{e}_1 \Rightarrow \mathbf{F} = \mathbf{G} + \gamma \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 \Leftrightarrow \mathbf{F}^{-1} = \mathbf{G} - \gamma \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2$$

Cinématique : si $\mathbf{n} \in \text{plan}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$, alors \mathbf{n} reste dans ce plan.

On note $\beta = \text{angle}(\mathbf{e}_1, \mathbf{n})$ l'angle polaire de \mathbf{n} dans le plan $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$.

Relation entre les angles polaires initial et actuel :

$$\beta_t = \text{Arctan} \frac{\tan \beta_0}{1 + \gamma \tan \beta_0} [\pi] \Leftrightarrow \beta_0 = \text{Arctan} \frac{\tan \beta_t}{1 - \gamma \tan \beta_t} [\pi]$$

Dans un glissement, on sait donc évaluer les invariants croisés actuels I_1^X et I_2^X en fonction de la direction initiale d'anisotropie.

Comportement thermique anisotrope

La loi de Fourier $\mathbf{q} = -\alpha \mathbf{grad}_E T$ est thermodynamiquement admissible, mais physiquement peu raisonnable, car elle est isotrope.

Exemple de conduction thermique isotrope transverse :

$$\mathbf{q} = -\alpha_1(\dots) \underbrace{(\mathbf{n}_t \cdot \mathbf{grad}_E T) \mathbf{n}_t}_{\mathbf{g}_1 (\parallel \mathbf{n}_t)} - \alpha_2(\dots) \underbrace{(\mathbf{grad}_E T - (\mathbf{n}_t \cdot \mathbf{grad}_E T) \mathbf{n}_t)}_{\mathbf{g}_2 (\perp \mathbf{n}_t)}$$

où :

$$\alpha_1(\dots) = \alpha_1(T, \|\mathbf{g}_1\|, X_I, X_{II}, X_{III}, \mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{X} \cdot \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{X}^2 \cdot \mathbf{g}_1)$$

$$\alpha_2(\dots) = \alpha_2(T, \|\mathbf{g}_2\|, X_I, X_{II}, X_{III}, \mathbf{g}_2 \cdot \mathbf{X} \cdot \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_2 \cdot \mathbf{X}^2 \cdot \mathbf{g}_2)$$

(tous les arguments scalaires ne sont pas nécessairement présents)

Les fonctions $\alpha_1(\dots)$ et $\alpha_2(\dots)$ sont à identifier expérimentalement (ou à idéaliser de manière physiquement sensée).

Critères de limite élastique

L'isotropie transverse modélise des milieux fibreux ($\mathbf{n} \parallel$ fibre)
ou des milieux lamellaires ($\mathbf{n}_r \perp$ lamelles).

Quelques critères possibles : (détail des calculs dans l'annexe I du pdf)

Critère :

$$K_s(\mathbf{n}) = \frac{\sqrt{B_{III}}}{\sqrt{\mathbf{B} \cdot \mathbf{N}_r}} \leq K_{s\lim}$$

$$K_I(\mathbf{n}) = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{N}_r}} \leq K_{I\lim}$$

$$\delta_{max}^{a(1)} = \frac{K_I(\mathbf{n}) K_s(\mathbf{n})}{\sqrt{B_{III}}} \leq \delta_{lim}^{a(1)}$$

$$\delta_{max}^{a(2)} = \frac{B_I - K_I(\mathbf{n})^2}{2 K_s(\mathbf{n})} \leq \delta_{lim}^{a(2)}$$

$$\delta_{max}^a = \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_3} + \frac{\lambda_3}{\lambda_1} \right) \leq \delta_{lim}^a$$

$$\delta_{max}^s(1) (= \delta_{max}^{a(2)}) \leq \delta_{lim}^s(1)$$

$$\delta_{max}^s = \frac{\sqrt{3}}{9} \frac{B_I^{3/2}}{B_{III}^{1/2}} \leq \delta_{lim}^s$$

critères réglementaires :

Protection :

Décollement de fibre ou cavitation dans les lamelles.

Rupture de fibre ou décollement entre lamelles.

Délaminage de fibre ou entre lamelles.

Plastification dans la matrice ou dans les lamelles.

Limitation de toutes les distorsions angulaires.

Limitation des distorsions stériques contenant \mathbf{n} .

Limitation de toutes les distorsions stériques.

Protection juridique.

Variables
d'état

Relation de
Helmholtz

Comportement
mécanique

Déviation des
directions
d'anisotropie

Comportement
thermique

Limite
élastique

Exemple de
modèle

Un modèle isotrope transverse (variables d'état)

Variables d'état tensorielles : $\{T, \mathbf{B}, \mathbf{N}_t\}$

Variables d'état scalaires retenues : $\{T, K_v, \delta, a\}$

$$\text{où } a = \frac{I_1^B}{K_v^{2/3}} = \frac{\mathbf{B} : \mathbf{N}_t}{B_{III}^{1/3}} \quad (a = 1 \text{ dans toute déformation sphérique})$$

(on a donc ignoré l'influence des invariants B_{II} et $I_2^B = \mathbf{B}^2 : \mathbf{N}_t$)

Changement de variables d'état :

La bijection $\{T, B_I, B_{III}, I_1^B\} \leftrightarrow \{T, K_v, \delta, a\}$ existe.

$$\bar{f}_\psi^B(T, B_I, B_{II}, B_{III}, I_1^B, I_2^B) = f_\psi(T, K_v, \delta, a)$$

Nouvelle expression du comportement mécanique :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} = & \rho_0 \left(\partial_{K_v} f_\psi - \frac{\delta}{K_v} \partial_\delta f_\psi - \frac{2a}{3K_v} \partial_a f_\psi \right) \mathbf{G} + \rho_0 \frac{\delta^{1/3}}{K_v^{5/3}} \partial_\delta f_\psi \mathbf{B} \\ & + \rho_0 \partial_a f_\psi \left(\frac{4}{K_v^{5/3}} \text{sym}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{N}_t) - \frac{2a}{K_v} \mathbf{N}_t \right) \quad (\text{détail du calcul dans le pdf}) \end{aligned}$$

Il reste à construire une fonction f_ψ physiquement justifiée.



Un modèle isotrope transverse (construction de f_ψ)

Un chemin dans l'espace des états : (pour atteindre un état quelconque)

$$\underbrace{E_0 = (T_0, 1, 1, 1)}_{\text{état de réf.}} \xrightarrow{\mathcal{C}^{(1)}} E_1 = (T, 1, 1, 1) \xrightarrow{\mathcal{C}^{(2)}} E_2 = (T, K_v, 1, 1) \xrightarrow{\mathcal{C}^{(3)}} E_3 = (T, K_v, \delta, 1) \xrightarrow{\mathcal{C}^{(4)}} \underbrace{E_t = (T, K_v, \delta, a)}_{\text{état final}}$$

$$f_\psi = g^{(1)}(T) + g^{(2)}(T, K_v) + g^{(3)}(T, K_v, \delta) + g^{(4)}(T, K_v, \delta, a)$$

$$f_s = -\partial_T f_\psi \quad f_e = f_\psi + T f_s \quad \boldsymbol{\sigma} = \dots \quad (\text{fonctions de } g^{(1)}, g^{(2)}, g^{(3)}, g^{(4)})$$

Équations à résoudre :

$$f_e(T, 1, 1, 1) = Q_{exp}^{(1)}(T) \quad (\text{chaleur massique, } J \cdot kg^{-1}, \text{ à déformation bloquée})$$

$$\frac{1}{3} \text{tr} \boldsymbol{\sigma}(T, K_v, 1, 1) = \boldsymbol{\sigma}_{exp}^{(2)}(T, K_v) \quad (\text{contrainte moyenne dans une déformation sphérique})$$

$$\boldsymbol{\sigma}^1_2(T, K_v, \delta, 1) = \boldsymbol{\tau}_{exp}^{(3)}(T, K_v, \delta) \quad (\text{contrainte tangentielle dans un glissement, } \mathbf{n}_t = \mathbf{e}_3)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^1_2(T, K_v, \delta, a) = \boldsymbol{\tau}_{exp}^{(4)}(T, K_v, \delta, a) \quad (\text{contrainte tangentielle dans un glissement, } \mathbf{n}_t \in \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\})$$

Solution : (avec une hypothèse simplificatrice sur $g^{(4)}$: $\partial_\delta \partial_a g^{(4)} = 0$)

$$g^{(1)} = -T \int_{T_0}^T \frac{Q_{exp}^{(1)}(T)}{T^2} dT$$

$$g^{(2)} = \frac{1}{\rho_0} \int_1^{K_v} \boldsymbol{\sigma}_{exp}^{(2)}(T, K_v) dK_v$$

$$g^{(3)} = \frac{K_v}{\rho_0 \sqrt{3}} \int_1^\delta \frac{\boldsymbol{\tau}_{exp}^{(3)}(T, K_v, \delta)}{\delta^{1/3} \sqrt{\delta^{2/3} - 1}} d\delta$$

$$g^{(4)} = \frac{K_v \lambda (\lambda^4 - 1)}{\rho_0} \int_1^a \frac{\boldsymbol{\tau}_{exp}^{(3)}(T, K_v, \delta) - \boldsymbol{\tau}_{exp}^{(4)}(T, K_v, \delta, a)}{f(a)} da$$

(voir λ et $f(a)$ dans le pdf)

Les fonctions expérimentales $Q_{exp}^{(1)}$, $\boldsymbol{\sigma}_{exp}^{(2)}$, $\boldsymbol{\tau}_{exp}^{(3)}$ et $\boldsymbol{\tau}_{exp}^{(4)}$ peuvent être idéalisées.

Un modèle isotrope transverse (synthèse)

Résumé du modèle construit :

- Variables d'état tensorielles : $\{T, \mathbf{B}, \mathbf{N}_t\}$
- Variables d'état scalaires retenues : $\{T, K_v, \delta, a = \frac{I_1^B}{K_v^{2/3}} = \frac{\mathbf{B}:\mathbf{N}_t}{B_{III}^{1/3}}\}$
- Quatre séries d'expériences :

$Q_{exp}^{(1)}(T)$ (chaleur massique, $J \cdot kg^{-1}$, à déformation bloquée)

$\sigma_{exp}^{(2)}(T, K_v)$ (contrainte moyenne dans une déformation sphérique)

$\tau_{exp}^{(3)}(T, K_v, \delta)$ (contrainte tangentielle dans un glissement du plan (e_1, e_2) avec $n_t = e_3$)

$\tau_{exp}^{(4)}(T, K_v, \delta, a)$ (contrainte tangentielle dans un glissement du plan (e_1, e_2) avec $n_t \in (e_1, e_2)$)

Les quatre expériences déterminent complètement le modèle :
les fonctions d'état et la loi de comportement mécanique.

On peut les idéaliser arbitrairement (de manière physiquement raisonnable)
sans compromettre le caractère élastique du modèle.



Variables
d'état

Comportement
mécanique

Cinquième partie

Élasticité générique (isotrope ou non)

Variables d'état d'un modèle élastique

Variables d'état tensorielles : $\{T, \mathbf{X}, \underbrace{\{\mathbf{N}_t^\bullet\}}_{\text{var. ciném.}}\}$

\mathbf{X} : un tenseur de déformation objectif,

\mathbf{N}_t^\bullet : éventuelles directions actuelles d'anisotropie.

Variables d'état scalaires retenues : $\{T, \underbrace{I_1, \dots, I_p}_{\text{var. ciném.}}\}$

I_\bullet : invariants de \mathbf{X} ou invariants croisés $\mathbf{X} : \mathbf{N}_t^\bullet$, $\mathbf{X}^2 : \mathbf{N}_t^\bullet$ ou des combinaisons, objectifs et indépendants choisis pour leur signification cinématique.

Dérivée particulière des variables d'état cinématiques :

$\dot{I}_j = \mathbf{S}_j : \mathbf{D}$ où \mathbf{S}_j est symétrique particulier à chaque variable cinématique.

Exemples : (bons exercices d'algèbre et de cinématique)

$$\dot{B}_I = 2\mathbf{B} : \mathbf{D} \quad \dot{B}_{II} = 2(\mathbf{B}_I \mathbf{B} - \mathbf{B}^2) : \mathbf{D} \quad \dot{B}_{III} = 2B_{III} \mathbf{G} : \mathbf{D}$$

$$(\mathbf{B} : \mathbf{N}_t^\bullet)' = (4 \text{sym}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{N}_t^\bullet) - 2(\mathbf{B} : \mathbf{N}_t^\bullet) \mathbf{N}_t^\bullet) : \mathbf{D}$$

$$(\mathbf{B}^2 : \mathbf{N}_t^\bullet)' = (4 \text{sym}(\mathbf{B}^2 \cdot \mathbf{N}_t^\bullet) - 2(\mathbf{B}^2 : \mathbf{N}_t^\bullet) \mathbf{N}_t^\bullet + 2\mathbf{B} \cdot \mathbf{N}_t^\bullet \cdot \mathbf{B}) : \mathbf{D}$$

$$\dot{\delta} = \left(\frac{\delta^{1/3}}{K_v^{2/3}} \mathbf{B} - \delta \mathbf{G} \right) : \mathbf{D} \quad \dot{a} = \left(-\frac{2a}{3} \mathbf{G} + \frac{4}{K_v^{2/3}} \text{sym}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{N}_t) - 2a \mathbf{N}_t \right) : \mathbf{D}$$

...

Comportement élastique (isotrope ou non)

Énergie libre massique de Helmholtz : $\psi^m = f_\psi(T, I_1, \dots, I_p)$

$$\begin{aligned}\dot{\psi}^m &= \partial_T f_\psi \dot{T} + \sum_{j=1}^p \partial_{I_j} f_\psi \dot{I}_j \\ &= \partial_T f_\psi \dot{T} + \sum_{j=1}^p \partial_{I_j} f_\psi \mathbf{S}_j : \mathbf{D}\end{aligned}$$

Dissipation intrinsèque nulle :

$$\begin{aligned}\forall \dot{T} \forall \mathbf{D}, \quad 0 &= -\rho (\dot{\psi}^m + s^m \dot{T}) + \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} \quad (\text{expression générale de } \Phi_{int}) \\ \forall \dot{T} \forall \mathbf{D}, \quad 0 &= -\rho (\partial_T f_\psi + f_s) \dot{T} + (-\rho \sum_{j=1}^p \partial_{I_j} f_\psi \mathbf{S}_j + \boldsymbol{\sigma}) : \mathbf{D}\end{aligned}$$

Relation de Helmholtz :

$$\partial_T f_\psi + f_s = 0 \quad (\text{raisonnement habituel : } \forall \dot{T}, \Phi_{int} = 0)$$

Comportement mécanique :

$$\boldsymbol{\sigma} = \rho \sum_{j=1}^p \partial_{I_j} f_\psi \mathbf{S}_j \quad (\text{raisonnement habituel : } \forall \mathbf{D}, \Phi_{int} = 0)$$

Construction d'un modèle élastique (isotrope ou non)

- 1 Choisir des variables d'état scalaires significatives et indépendantes ;
- 2 Calculer les tenseurs \mathbf{S}_j de chaque variable cinématique ($\dot{I}_j = \mathbf{S}_j : \mathbf{D}$) ;
- 3 Construire une fonction $f_\psi(T, I_1, \dots, I_p)$ physiquement sensée ;
- 4 Le comportement mécanique est : $\boldsymbol{\sigma} = \frac{\rho_0}{K_v} \sum_{j=1}^p \partial_{I_j} f_\psi \mathbf{S}_j$.



Données

Équations du
problème

Conditions
aux limites

Résolution

Sixième partie

Le problème élastique

Données du problème

- 1 Un solide déformable dans sa forme de référence \mathcal{D}_0^m .
(ainsi que les champs $\rho_0(P), T_0(P)$ et les directions de référence d'anisotropies $N_0^*(P)$)
- 2 Un modèle de comportement élastique :
 - la liste des variables d'état scalaires $\{T, I_1, \dots, I_p\}$;
 - l'expression des fonctions d'état ; (dont $\dot{\varepsilon}^m$, équation de la chaleur)
 - les lois de comportement mécanique $f\sigma$ et thermique f_q .
- 3 Les sollicitations extérieures (mécaniques et thermiques) :
 - des actions à distance : $f_0^m(P, t)$ et $r_{ext}^v(P, t)$, $P \in \mathcal{D}_t^m$;
 - des actions de contact : $f_{ext}^s(P', t)$ et $q_{ext}^s(P', t)$, $P' \in \partial \mathcal{D}_t^m$;
 $u_{ext}^s(P', t)$ et $T_{ext}^s(P', t)$, $P' \in \partial \mathcal{D}_t^m$.

(les valeurs à $t = t_0$ sont appelées conditions initiales)

Rappels de cinématique :

$$\mathbf{F} = \text{grad}_L \mathbf{x}_t = \mathbf{G} + \text{grad}_L \mathbf{u} \quad \mathbf{B} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^\top \quad \mathbf{D} = \text{sym}(\dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1})$$

$$\mathbf{n}_t^* = \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_0^*}{\|\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_0^*\|} \Leftrightarrow \mathbf{N}_t^* = \frac{(\mathbf{F}^\top \otimes \mathbf{F}) : \mathbf{N}_0^*}{(\mathbf{F}^\top \cdot \mathbf{F}) : \mathbf{N}_0^*}$$

$$\forall \Psi : \quad \text{grad}_E \Psi = (\text{grad}_L \Psi) \cdot \mathbf{F}^{-1} \quad (\text{grad}_L \Psi)^\cdot = \text{grad}_L \dot{\Psi}$$

Toutes les grandeurs qui interviennent dans les équations se ramènent donc aux champs matériels inconnus $\{T(P, t), \mathbf{x}_t(P, t)\}$ (ou bien $\{T(P, t), \mathbf{u}(P, t)\}$).

Équations du problème

1 Conservation de la masse :

$$\rho(P, t) = \frac{\rho_0(P)}{\det \mathbf{F}(P, t)}$$

2 Mécanique de Newton :

$$\operatorname{div}_E \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{f}_0^m = \rho \ddot{\mathbf{x}}_t \quad (= \rho \ddot{\mathbf{u}}_t) \quad (\text{équation différentielle vectorielle})$$

$$\text{où : } \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{f}_\sigma(T, \mathbf{B}, \mathbf{N}_t^\bullet) \quad (\text{comportement mécanique})$$

3 Premier principe de la thermodynamique :

$$\rho \dot{e}^m = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} + r_{ext}^v - \operatorname{div}_E \mathbf{q} \quad (\text{équation différentielle scalaire})$$

$$\text{où : } \mathbf{q} = \mathbf{f}_q(\operatorname{grad}_E T, \dots) \quad (\text{comportement thermique})$$

Rappel

Le second principe de la thermodynamique est satisfait à tout instant de toute évolution par les lois de comportement mécanique et thermique (lois thermodynamiquement admissibles).

Conditions aux limites

Soit $\partial \mathcal{D}_t^m$ la frontière actuelle du solide déformable
et soit $P' \in \partial \mathcal{D}_t^m$ une particule courante de la frontière actuelle.

- ① **Champ inconnu imposé à la frontière** : C.L. de Dirichlet
 - déplacement (ou position) imposé(e) : $\mathbf{u}(P', t) = \mathbf{u}^s(P', t)$
 - température imposée : $T(P', t) = T^s(P', t)$
- ② **Dérivée normale imposée à la frontière** : C.L. de Neumann
 - contrainte imposée : $\boldsymbol{\sigma}(P', t) \cdot \mathbf{n}(P', t) = \mathbf{f}_{ext}^s(P', t)$
 - flux thermique imposé : $\mathbf{q}(P', t) \cdot \mathbf{n}(P', t) = q_{ext}^s(P', t)$
- ③ **Relation entre inconnue et dérivée normale** : C.L. mixte
 - mécanique : $\mathbf{f}_3(\boldsymbol{\sigma}(P', t) \cdot \mathbf{n}(P', t), \mathbf{u}(P', t)) = \mathbf{0}$ (ex : appui souple)
 - thermique : $f_4(\mathbf{q}(P', t) \cdot \mathbf{n}(P', t), T(P', t)) = 0$ (ex : fuite thermique)
- ④ **Conditions initiales** : (seulement pour les problèmes non stationnaires)
 - champs inconnus initiaux : $\mathbf{u}(P, t_0)$ et $T(P, t_0)$, $P \in \mathcal{D}_t^m$

En une particule P' de $\partial \mathcal{D}_t^m$, les conditions aux limites doivent être d'un seul type (soit Dirichlet, soit Neumann, soit mixte).

Résolution

Difficultés :

- quatre équations aux dérivées partielles couplées, en général non linéaires ; (équation de mouvement et équation de la chaleur)
- existence et unicité des solutions rarement démontrées ;
- possibilité d'existence de bifurcations (instabilité, flambage) et/ou d'infinie sensibilité aux conditions initiales ;

Problèmes stationnaires : (on cherche des champs indépendants du temps)

- on annule les dérivées partielles dans les EDP ;
- les conditions aux limites sont indépendantes du temps ;
- solution analytique rarement possible. ▶ Éléments finis

Problèmes évolutifs : (on cherche l'évolution temporelle des champs)

- les conditions aux limites sont fonction du temps ;
- les conditions initiales sont prises en compte ;
- solution analytique rarement possible ; ▶ Éléments finis
- ne convergent généralement pas vers un « équilibre final ».





Modèle
utilisé

Traction
acier

Flexion
caoutchouc

Traction
caoutchouc

Glissement
caoutchouc

Septième partie

Illustrations numériques

Le modèle élastique utilisé

Élasticité isotrope : on utilise le modèle $\{T, K_v, \delta\}$

$$e^m = Q_{exp}^{(1)} + \frac{1}{\rho_0} \int_1^{K_v} (\sigma_{exp}^{(2)} - T \partial_T \sigma_{exp}^{(2)}) dK_v + \frac{1}{\rho_0 \sqrt{3}} \int_1^\delta \frac{\tau_{exp1}^{(3)} - T \partial_T \tau_{exp1}^{(3)}}{\delta^{1/3} \sqrt{\delta^{2/3} - 1}} d\delta$$

avec les expériences idéalisées suivantes :

$Q_{exp}^{(1)}(T)$ (chaleur massique à déformation bloquée) est remplacé par deux mesures en

dilatation libre : $Q_{exp}^{(5)}(T) = C_p (T - T_0)$ et $K_{vexp}^{(5)}(T) = 1 + \beta (T - T_0)$ ($T > T_0 - \frac{1}{\beta}$)

$\sigma_{exp}^{(2)}(T, K_v) = \sigma_{exp}^{(2)}(T, 1) + \xi_0 \ln K_v$ (contr. moyenne dans une déf. sphérique isotherme)

$\tau_{exp1}^{(3)}(T, \delta) = \mu_0 \gamma$ (contrainte tangentielle dans un glissement sans dilatation sphérique initiale)

Les coefficients C_p, β, ξ_0, μ_0 sont constants en T .

Comportement mécanique :

$$\boldsymbol{\sigma} = K_0 \mathbf{G} + K_1 \mathbf{B} \quad \text{où} \quad K_0 = \xi_0 \ln \frac{K_v}{1 + \beta(T - T_0)} - \frac{\mu_0 \delta^{2/3}}{K_v} \quad \text{et} \quad K_1 = \frac{\mu_0}{K_v^{5/3}}$$

Comportement thermique :

$$\mathbf{q} = -\alpha \text{grad}_E T \quad (\text{loi de Fourier, } \alpha \text{ constant})$$

Résolution : méthode des éléments finis dans Comsol[®].

Relations cinématiques, comportements méc. et th. (variables à définir dans le logiciel),

description de Lagrange des champs, formulation intégrale sur \mathcal{D}_0 et sur $\partial \mathcal{D}_0$.

(voir les détails dans le pdf)

Traction d'une barre cylindrique d'acier

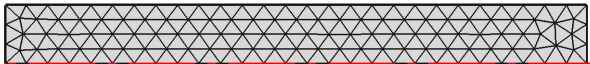
Matériau : valeurs de $C_p, \beta, \xi_0, \mu_0, \alpha$ pour un acier à 20 C.

Conditions aux limites :

- **Mécanique :** déplacement uniforme de 0 à $0.003 L_0$ imposé sur une extrémité, à la vitesse de 4 mm/mn, puis arrêt pendant 5 s.
- **Thermique :**
 - ① frontières adiabatiques ;
 - ② frontières isothermes à 20 C ;
 - ③ surface latérale adiabatique, extrémités à 20 C.

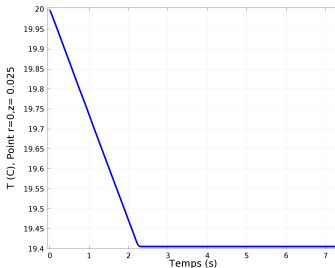
Type de calcul : temporel « quasi-statique » (pas d'accélération, $\text{div}_E \sigma = 0$)

Maillage axisymétrique : (éprouvette cylindrique)



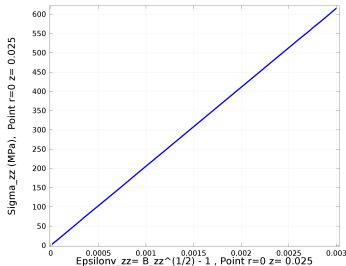
Résultats (frontières adiabatiques)

Les contraintes et les températures sont uniformes dans l'éprouvette.



$T(t)$

chûte de température : 0.59 C



$\sigma_{zz}(\epsilon_{zz}^V)$

quasi-linéarité ($\epsilon_{zz}^V \leq 3 \cdot 10^{-3}$)

Modèle
utilisé

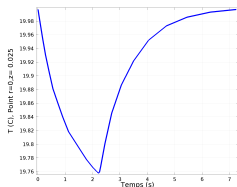
Traction
acier

Flexion
caoutchouc

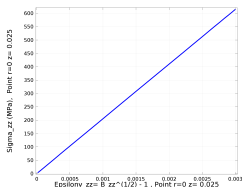
Traction
caoutchouc

Glissement
caoutchouc

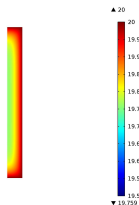
Résultats (frontières à 20 C)



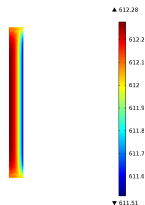
$T(t)$ au centre (chûte de 0.24 C)



$\sigma_{zz}(\epsilon_{zz}^V)$ au centre



Champ T (C) à $t = 2.25$ s



Champ σ_{zz} (Mpa) à $t = 2.25$ s

Remarque : si la vitesse est de 10mm/mn (au lieu de 4mm/mn), la chute de température au centre en fin de mouvement est 0.42 C. (si adiabatique : 0.59 C)

Modèle
utilisé

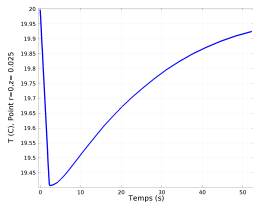
Traction
acier

Flexion
caoutchouc

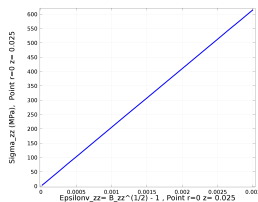
Traction
caoutchouc

Glissement
caoutchouc

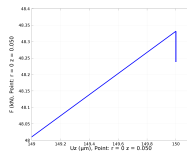
Résultats (extrémités à 20 C, surface latérale adiabatique)



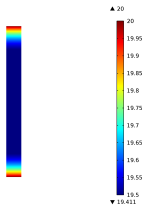
$T(t)$ au centre



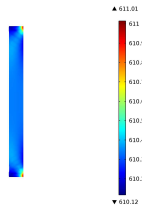
$\sigma_{zz}(\epsilon_{zz}^v)$ au centre



$F(u_z)$



Champ T (C) à $t = 2.25$ s
(isothermes horizontales)



Champ σ_{zz} (Mpa) à $t = 2.25$ s
(quasi-uniforme)

Modèle
utilisé

Traction
acier

Flexion
caoutchouc

Traction
caoutchouc

Glissement
caoutchouc

Forte flexion d'un bloc de caoutchouc

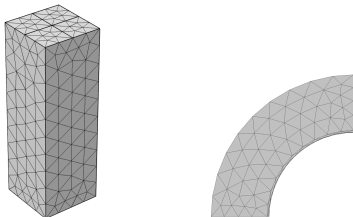
Matériau : même modèle élastique isotrope $\{T, K_v, \delta\}$, avec les valeurs de $C_p, \beta, \xi_0, \mu_0, \alpha$ pour un caoutchouc vulcanisé.

Conditions aux limites :

- **mécanique :**
les normales de la face supérieure sont imposées horizontales.
($\frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_3}{\|\mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_3\|} = \mathbf{e}_1$, solution non unique)
- **thermique :** frontières isothermes (20 C)

Type de calcul : solution stationnaire, quasi-statique ($\text{div}_E \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}, \dot{T} = 0$)
(temps fictif, pas d'équation de la chaleur, convergence guidée par une approximation initiale)

Maillage 3D et déformée :



Résultats



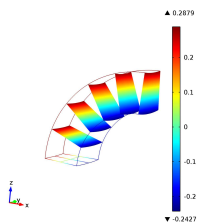
Modèle utilisé

Traction acier

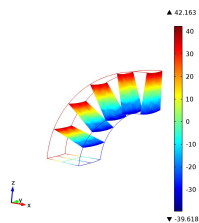
Flexion caoutchouc

Traction caoutchouc

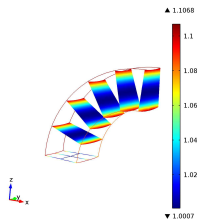
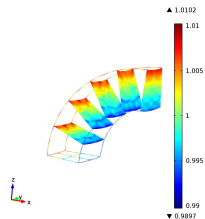
Glissement caoutchouc



Allongements relatifs longitudinaux



Contraintes normales (MPa)

Distorsion stérique maximale δ Dilatation volumique K_V

Forte traction/compression (caoutchouc)

On utilise la même éprouvette que précédemment, avec le même type de calcul (isotherme et quasi-statique)

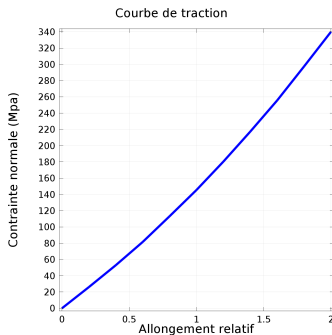
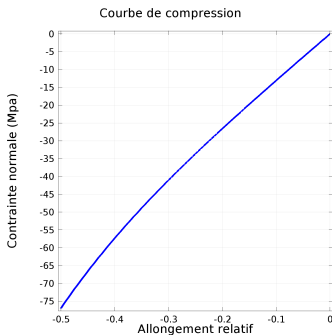
Modèle
utilisé

Traction
acier

Flexion
caoutchouc

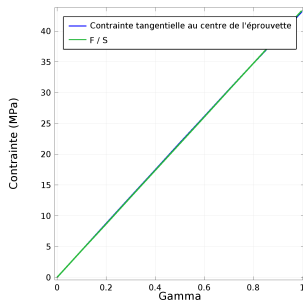
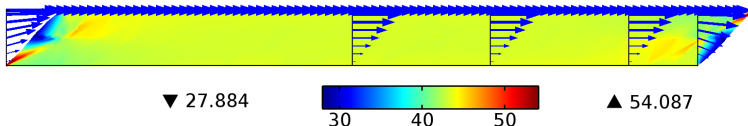
Traction
caoutchouc

Glissement
caoutchouc



Essai de glissement (caoutchouc)

Éprouvette : 100mm × 25mm × 5mm, même caoutchouc.
 Déplacement horizontal imposé : 5mm.
 Même type de calcul (isotherme et quasi-statique).

Modèle
utiliséTraction
acierFlexion
caoutchoucTraction
caoutchoucGlissement
caoutchouc

Huitième partie

Conclusion

Définition de l'élasticité : (thermo)(hyper)élasticité !

- ① Variables d'état tensorielles : $\{T, \mathbf{X}, \{\mathbf{N}_t^*\}\}$; (pas de variable mnésique)
- ② Dissipation intrinsèque nulle ; (dissipation thermique toujours non négative)
- ③ Le tenseur des contraintes est une fonction d'état.

Modèle d'élasticité : (thermodynamiquement admissible)

- Choix de variables d'état scalaires indépendantes : $\{T, I_1, \dots, I_p\}$;
- Expression d'une énergie libre physiquement justifiée ;
- \forall évolution, $\Phi_{int} = 0$ implique le comportement mécanique ;
(expressions différentes suivant le tenseur de déformation choisi)
- \forall évolution, $\Phi_{th} \geq 0$ limite le choix du comportement thermique.

La loi de Hooke n'est pas thermodynamiquement admissible.
(il n'existe pas d'énergie libre de Helmholtz telle que $\Phi_{int} = 0$ implique cette loi)

Problème d'élasticité :

En pratique, la résolution numérique est incontournable.



Et maintenant une annonce...

Le prochain épisode s'intitule :

Comportements inélastiques

Au programme :

- Inélasticité (milieux monophasiques) ;
- Inélasticité sans variable mnésique ;
- Inélasticité à une variable mnésique ;
- Exemples (plasticité, endommagement) ;
- Inélasticité à plusieurs variables mnésiques ;
- Épilogue : place aux jeunes !

Merci de votre attention.

Formulation intégrale (EDP et CL de Neumann)

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div}_E \boldsymbol{\sigma} + \rho (\mathbf{f}_0^m - \boldsymbol{\gamma}) = \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} + r^v - \operatorname{div}_E \mathbf{q} - \rho \dot{e}^m = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \forall \mathbf{g}(P, t) \forall h(P, t), \quad (\text{champs matériels arbitraires})$$

$$\int_{\mathcal{D}_t} [(\operatorname{div}_E \boldsymbol{\sigma} + \rho_E (\mathbf{f}_{0E}^m - \boldsymbol{\gamma}_E)) \cdot \mathbf{g}_E + (\boldsymbol{\sigma}_E : \mathbf{D}_E + r_E^v - \operatorname{div}_E \mathbf{q} - \rho_E \dot{e}_E^m) h_E] dv_t = 0$$

$$\int_{\mathcal{D}_t} -\boldsymbol{\sigma}_E : \operatorname{grad}_E \mathbf{g} dv_t + \int_{\partial \mathcal{D}_t} \mathbf{g}_E \cdot \boldsymbol{\sigma}_E \cdot \mathbf{n}_t ds_t + \int_{\mathcal{D}_t} \rho_E (\mathbf{f}_{0E}^m - \boldsymbol{\gamma}_E) \cdot \mathbf{g}_E dv_t$$

$$+ \int_{\mathcal{D}_t} \mathbf{q}_E \cdot \operatorname{grad}_E h dv_t - \int_{\partial \mathcal{D}_t} h_E \mathbf{q}_E \cdot \mathbf{n}_t ds_t + \int_{\mathcal{D}_t} (\boldsymbol{\sigma}_E : \mathbf{D}_E + r_E^v - \rho_E \dot{e}_E^m) h_E dv_t = 0$$

$$\int_{\mathcal{D}_t} -\boldsymbol{\sigma}_E : \operatorname{grad}_E \mathbf{g} dv_t + \int_{\partial \mathcal{D}_t^f} \mathbf{g}_E \cdot \mathbf{f}_E^s ds_t + \int_{\partial \mathcal{D}_t^f} \mathbf{g}_E \cdot \boldsymbol{\sigma}_E \cdot \mathbf{n}_t ds_t + \int_{\mathcal{D}_t} \rho_E (\mathbf{f}_{0E}^m - \boldsymbol{\gamma}_E) \cdot \mathbf{g}_E dv_t +$$

$$\int_{\mathcal{D}_t} \mathbf{q}_E \cdot \operatorname{grad}_E h dv_t - \int_{\partial \mathcal{D}_t^q} h_E \mathbf{q}_E^s ds_t - \int_{\partial \mathcal{D}_t^q} h_E \mathbf{q}_E \cdot \mathbf{n}_t ds_t + \int_{\mathcal{D}_t} (\boldsymbol{\sigma}_E : \mathbf{D}_E + r_E^v - \rho_E \dot{e}_E^m) h_E dv_t = 0$$

$$\int_{\mathcal{D}_0} -\boldsymbol{\sigma}_L : (\operatorname{grad}_L \mathbf{g} \cdot \mathbf{F}^{-1}) \det \mathbf{F} dv_0 + \int_{\partial \mathcal{D}_0^f} \mathbf{g}_L \cdot \mathbf{f}_L^s \det \mathbf{F} \|\mathbf{F}^{-\top} \cdot \mathbf{n}_0\| ds_0$$

$$+ \int_{\partial \mathcal{D}_0^f} \mathbf{g}_L \cdot \boldsymbol{\sigma}_L \cdot (\mathbf{F}^{-\top} \cdot \mathbf{n}_0) \det \mathbf{F} ds_0 + \int_{\mathcal{D}_0} \rho_L (\mathbf{f}_{0L}^m - \boldsymbol{\gamma}_L) \cdot \mathbf{g}_L \det \mathbf{F} dv_0$$

$$+ \int_{\mathcal{D}_0} \mathbf{q}_L \cdot (\operatorname{grad}_L h \cdot \mathbf{F}^{-1}) \det \mathbf{F} dv_0 - \int_{\partial \mathcal{D}_0^q} h_L \mathbf{q}_L^s \det \mathbf{F} \|\mathbf{F}^{-\top} \cdot \mathbf{n}_0\| ds_0$$

$$- \int_{\partial \mathcal{D}_0^q} h_L \mathbf{q}_L \cdot (\mathbf{F}^{-\top} \cdot \mathbf{n}_0) \det \mathbf{F} ds_0 + \int_{\mathcal{D}_0} (\boldsymbol{\sigma}_L : \mathbf{D}_L + r_L^v - \rho_L \dot{e}_L^m) h_L \det \mathbf{F} dv_0 = 0, \forall \mathbf{g}_L \forall h_L$$

Les C.L. de Neumann sont prises en compte, il reste à traiter les autres...

Formulation intégrale (CL de Dirichlet et mixtes)

On considère le reste des conditions aux limites comme des équations supplémentaires du problème :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u}(P', t) - \mathbf{u}^s(P', t) = \mathbf{0} \\ T(P', t) - T^s(P', t) = 0 \\ \mathbf{f}_3(\boldsymbol{\sigma}(P', t) \cdot \mathbf{n}(P', t), \mathbf{u}(P', t)) = \mathbf{0} \\ f_4(\mathbf{q}(P', t) \cdot \mathbf{n}(P', t), T(P', t)) = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \forall \mathbf{k}_1(P', t) \forall k_2(P', t) \forall \mathbf{k}_3(P', t) \forall k_4(P', t) \\ \text{(champ matériels surfaciques arbitraires)} \end{array}$$

$$\int_{\partial \mathcal{D}_{1t}} \mathbf{k}_{1E} \cdot (\mathbf{u}_E - \mathbf{u}_E^s) ds_t + \int_{\partial \mathcal{D}_{2t}} k_{2E} (T_E - T_E^s) ds_t + \int_{\partial \mathcal{D}_{3t}} \mathbf{k}_{3E} \cdot \mathbf{f}_{3E} ds_t + \int_{\partial \mathcal{D}_{4t}} k_{4E} f_{4E} ds_t = 0$$

Changement de variables pour ramener ces intégrales à des intégrales sur les frontières initiales :

$$\int_{\partial \mathcal{D}_{10}} \mathbf{k}_{1L} \cdot (\mathbf{u}_L - \mathbf{u}_L^s) \det \mathbf{F} \|\mathbf{F}^{-\top} \cdot \mathbf{n}_0\| ds_0 + \int_{\partial \mathcal{D}_{20}} k_{2L} (T_L - T_L^s) \det \mathbf{F} \|\mathbf{F}^{-\top} \cdot \mathbf{n}_0\| ds_0 +$$

$$\int_{\partial \mathcal{D}_{30}} \mathbf{k}_{3L} \cdot \mathbf{f}_{3L} \det \mathbf{F} \|\mathbf{F}^{-\top} \cdot \mathbf{n}_0\| ds_0 + \int_{\partial \mathcal{D}_{40}} k_{4L} f_{4L} \det \mathbf{F} \|\mathbf{F}^{-\top} \cdot \mathbf{n}_0\| ds_0 = 0,$$

$$\forall \mathbf{k}_{1L} \forall k_{2L} \forall \mathbf{k}_{3L} \forall k_{4L}$$

Pour tenir compte des CL de Dirichlet et mixtes, il suffit d'ajouter ces intégrales de frontière à la formulation précédente.

Discrétisation spatiale

Maillage et interpolation :

On construit sur \mathcal{D}_0 une famille \mathbb{F}_{pol} de champs $\bar{\chi}(\mathbf{x}_0)$ définis par morceaux et déterminés par des valeurs aux nœuds de chaque maille.

(les interpolations $\bar{\chi} \in \mathbb{F}_{pol}$ sont souvent choisies polynomiales de degré ≤ 3 et de continuité C^0)

Chaque champ $\bar{\chi}$ de \mathbb{F}_{pol} est engendré par N champs de base $\bar{\Psi}_k$:

$$\bar{\chi} = \sum_{j=1}^N v_j \bar{\Psi}_j \quad \text{où } \bar{\Psi}_j \in \mathbb{F}_{pol} \text{ tel que } \begin{cases} \bar{\Psi}_j = 1 \text{ au nœud } j \\ \bar{\Psi}_j = 0 \text{ aux autres nœuds} \end{cases}$$

Approximation pour un problème stationnaire : ($\dot{x}=0$)
(discrétisation spatiale)

Pour chaque champ inconnu $\{T_L, u_{1L}, u_{2L}, u_{3L}\}$, on cherche des champs $\{\bar{T}_L, \bar{u}_{1L}, \bar{u}_{2L}, \bar{u}_{3L}\}$ de \mathbb{F}_{pol} qui annulent la formulation intégrale

en remplaçant chaque condition $\forall \mathbf{g}_L \forall h_L \forall k_L$ par $\forall \bar{\chi}$. ($\bar{\Psi}_k$ en nombre fini : N)

Exemple pour l'une des intégrales :

$$\int_{\mathcal{D}_0} \boldsymbol{\sigma}_L : (\mathbf{grad}_L \mathbf{g} \cdot \mathbf{F}^{-1}) \det \mathbf{F} \, dv_0 \quad \longrightarrow \quad \int_{\mathcal{D}_0} f_\sigma(\bar{T}_L, \bar{\mathbf{u}}_L) : (\mathbf{grad}_L \bar{\chi} \cdot (\mathbf{G} + \mathbf{grad}_L \bar{\mathbf{u}})^{-1}) \det(\mathbf{G} + \mathbf{grad}_L \bar{\mathbf{u}}) \, dv_0$$

$$\text{où } \bar{T}_L = \sum_{j=1}^N T_j \bar{\Psi}_j \quad \text{et} \quad \bar{\mathbf{u}}_L = \mathbf{e}_1 \sum_{j=1}^N u_j^1 \bar{\Psi}_j + \mathbf{e}_2 \sum_{j=1}^N u_j^2 \bar{\Psi}_j + \mathbf{e}_3 \sum_{j=1}^N u_j^3 \bar{\Psi}_j$$

En écrivant pour chaque champ inconnu que la formulation intégrale est nulle $\forall \bar{\Psi}_k$, on obtient $4N$ équations algébriques (en général non linéaires), dont les inconnues sont les valeurs aux nœuds $\{T_j, u_j^1, u_j^2, u_j^3\}$.

On en déduit tous les autres champs utiles (déformation, contrainte, etc.).

Discrétisation temporelle

Approximation pour un problème non stationnaire : (discrétisation temporelle)

- Différences finies en temps : on résout un problème spatial (discrétisation spatiale) à chaque pas de temps.
- Les dérivées particulières \dot{T} , \dot{u} et \ddot{u} ne sont pas nulles !
Leur approximation se fait par des méthodes implicites ou explicites.
- Le choix des incréments de temps est délicat :
 - trop grands : risque de masquer des phénomènes rapides ;
 - trop petits : coût de calcul excessif ;
 - il existe des algorithmes heuristiques pour calculer des incréments de temps automatiques.

Synthèse

- ① La formulation intégrale est exactement équivalente au système d'équations à résoudre si elle est nulle quels que soient les champs arbitraires.
- ② la solution est approchée car :
 - les frontières sont approximées par le maillage ;
 - on cherche les champs inconnus dans \mathbb{F}_{pol} ;
 - les champs arbitraires sont réduits à \mathbb{F}_{pol} ;
 - le choix des incréments de temps est délicat.
- ③ L'approximation tend vers la solution exacte en diminuant la taille des mailles et des incréments de temps. (borne de l'erreur ?)
- ④ Si le système algébrique à résoudre est non linéaire, les solutions peuvent être multiples voire inexistantes.
En cas de non unicité, la solution fournie par l'algorithme dépend *a priori* :
 - de l'algorithme utilisé pour la résolution du système algébrique,
 - de l'initialisation utilisée (*guess*).